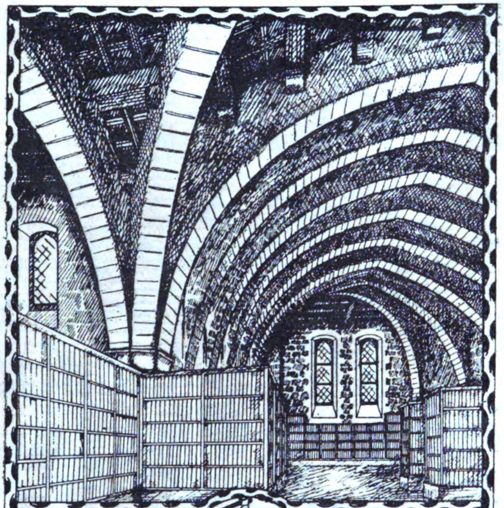


LECCIONES

DE

ARITMÉTICA.

LECCIONES

DE

ARITMÉTICA

POR

D. BERNARDINO SANCHEZ VIDAL,

REGENTE EN MATEMÁTICAS.

SEGUNDA EDICION.

MADRID,

IMPRENTA DE F. MARTÍNEZ GARCÍA,

calle del Oso, número 21.

1866

ADVERTENCIA.

Una vez decidido á publicar en diferentes tomos un Tratado completo de Matemáticas que pueda ser de alguna utilidad para los jóvenes que se dedican á carreras especiales, he procurado se halle todo lo más conforme posible con los programas oficiales de las escuelas del Estado tanto civiles como militares, evitándoles de este modo el molesto trabajo de consultar dos ó más autores al tener que aprender cuanto para el ingreso en las mismas se les exige.

En este concepto, y tendiendo siempre al mismo fin, he procurado en esta segunda edicion armonizar mis *Lecciones de Aritmética* con aquellos programas más exigentes. Así, pues, figuran en ella teorías de que la anterior carecia, como son la de *fracciones contínuas*, de *progresiones* y *logaritmos*.

Otras teorías han sido tratadas con mayor extension, tales como la de *proporciones*, y especialmente la de los *diferentes sistemas de numeracion*.

Algunas reglas contiene tambien esta segunda edicion de las cuales carece la primera, como la de *falsa posicion*, y otra para extraer la raiz cúbica por un método abreviado.

Finalmente, he corregido las muchas faltas de imprenta de que la primera edicion adolecia, lo mismo que otras de distinta índole; sin embargo, no abrigo la vana presuncion de creer que ésta se halle privada de defectos, y que satisfaga completamente las exigencias cada vez más crecientes de nuestras escuelas.

ÍNDICE.

PRIMERA PARTE.

DE LOS NÚMEROS ENTEROS.

SEGUNDA PARTE.

PROPIEDADES GENERALES DE LOS NÚMEROS.

TERCERA PARTE.

DE LOS NÚMEROS QUEBRADOS, MIXTOS Y FRACCIONES DECIMALES.

DE LOS NUMEROS QUEBRADOS Y MIXTOS.

PÁGS.

QUINTA PARTE.

POTENCIAS Y RAICES DE LOS NÚMEROS.

SEXTA PARTE.

NÚMEROS INCONMENSURABLES. — TEORÍA DE LAS APROXIMACIONES DECIMALES.

SEPTIMA PARTE.

RAZONES, PROPORCIONES Y PROBLEMAS QUE DE ELLAS DEPENDEN.

OCTAVA PARTE.

PROGRESIONES Y LOGARITMOS.

PROGRESIONES.

LOGARITMOS.

PÁGS.

APÉNDICE.

SISTEMAS DE NUMERACION.

FIN DEL ÍNDICE.

LECCIONES DE ARITMÉTICA.

PRIMERA PARTE.

DE LOS NÚMEROS ENTEROS.

LECCION PRIMERA.

Introduccion. — Aritmética. — Formacion de los números. — Numeracion. — Numeracion hablada. — Numeracion escrita.

INTRODUCCION.

1. Se da el nombre de MATEMÁTICAS *á la ciencia que tiene por objeto el estudio de la cantidad en general.*

2. MAGNITUD ó CANTIDAD *es todo lo que puede sufrir aumento ó disminucion.* Bajo este punto de vista, cuanto existe en el universo es cantidad; porque todo es susceptible de ser aumentado ó disminuido, ya sea físicamente, ya porque nuestra imaginacion conciba la posibilidad de este aumento ó disminucion.

La cantidad se divide en CONTÍNUA y DISCONTÍNUA: *cantidad contínua es aquella que puede aumentar ó disminuir por partes tan pequeñas como queramos:* el tiempo, la longitud, etc., son cantidades contínuas. *Discontínua es la que no puede aumentar ó disminuir de este modo:* una reunion de hombres, una coleccion de libros, etc., son cantidades discontínuas, puesto que el aumento ó disminucion tiene que ser, por lo ménos, en un hombre ó en un libro.

Para formarnos una idea exacta de la cantidad, *es necesario que la comparemos con otra conocida de igual especie;* porque un objeto considerado en sí mismo, no puede decirse que sea grande ó pequeño: la idea de la magnitud de una cosa no puede formarse sino con relacion á otra de la misma especie que conozcamos: de este modo se comprende cómo un objeto cualquiera puede ser grande y pequeño, comparándole sucesivamente con otros dos que sean respectivamente menor y mayor que el propuesto.

Como todas las cantidades no admiten esta comparacion, de aquí que no de todas podamos formarnos una idea exacta: de estas cantidades no se ocupan las Matemáticas; la condicion á que debe satisfacer una cantidad para que corresponda al estudio de esta ciencia es que sea *comparable*, es decir, *medible;* y para que una cantidad se pueda medir, es necesario, *que suponiendo conocida una cantidad cualquiera, podamos venir en conocimiento de otra que sea respecto de ella el doble, triple*, etc., *mitad, tercera parte*, etc. El dolor, por ejemplo, es cantidad, puesto que es susceptible de aumento y disminucion; pero no se puede comparar con otro, luego no se puede medir; por eso no corresponde su estudio á las Matemáticas.

3. De la comparacion de una cantidad con otra resúlta lo que en Matemáticas se llama RAZON ó RELACION; y esta razon ó relacion toma el nombre de NÚMERO cuando se trata de averiguar las veces que la cantidad conocida que sirve de término de comparacion, considerada como UNIDAD, está contenida en aquella que se compara: de aquí resulta, que UNIDAD *es la cantidad que sirve de término de comparacion á todas las de su especie, y* NÚMERO *el resultado de esta comparacion.*

La unidad se puede elegir á nuestro arbitrio cuando corresponde á cantidades contínuas, como en el tiempo, que puede ser el año, el mes, el dia, etc.: y está determinada por la naturaleza, si corresponde á cantidades discontínuas, como en una coleccion de libros, que no podrá ser otra sino el libro.

4. Siendo el número lo que resulta de la comparacion de una cantidad con su unidad (3), podrá suceder: 1.° que la unidad esté contenida exactamente en la cantidad que se quiere medir, lo que nos da el *número entero;* 2.° que no llegue á contener

ni una vez á la unidad, en cuyo caso se apreciará esta cantidad dividiendo la unidad en un número tal de partes iguales, que una de ellas esté contenida exactamente en la cantidad que se ha de medir; y la relacion que hay entre el número de partes en que se ha dividido la unidad y el que expresa las que de éstas contiene la cantidad, forma lo que se llama el número *quebrado* ó *fraccion;* 3.° que ademas de contener la cantidad un cierto número de veces á la unidad, quede una parte menor que ella, la que apreciada del modo que hemos dicho anteriormente, nos dará un número compuesto de un entero y quebrado, que se llama *número mixto;* el número mixto toma el nombre de *fraccionario*, cuando dividiendo cada unidad del entero en tantas partes como se dividió para apreciar el quebrado, y reuniendo todas estas partes, se escribe bajo la forma de quebrado; 4.° que ni la unidad ni ninguna de las partes en que se divida, esté contenida exactamente en la cantidad que se ha de medir; en cuyo caso, dicha cantidad no se puede apreciar exactamente con aquella unidad, obteniendo lo que se llama número *inconmensurable.*

De lo dicho resulta que el número puede ser *entero, quebrado, mixto* é *inconmensurable*. ENTERO *es el que consta de una ó varias unidades;* QUEBRADO *es el que no llega á valer la unidad, y sólo consta de parte ó partes iguales de la misma;* MIXTO *el que se compone de entero y quebrado; é* INCONMENSURABLE *el que proviene de la comparacion de una cantidad con su unidad, y ni ésta ni cualquiera de las partes iguales en que se puede dividir, está contenida exactamente en aquella.*

Si el número expresa de qué son sus unidades, se llama *concreto;* y si no lo expresa, *abstracto*. Los números concretos de una misma especie se llaman *homogéneos*, y los de especies distintas *heterogéneos*. Ademas toma el número otras denominaciones particulares que ya iremos dando á conocer.

ARITMETICA.

5. La parte de las Matemáticas que trata de los números, se llama ARITMÉTICA, y se ocupa: 1.° de la formacion de los mismos; 2.° de su numeracion ó modo de expresarlos; 3.° de su

cálculo; 4.º de sus propiedades; 5.º de la resolucion de los problemas què á ellos se refieren.

Formacion de los números.

6. De la definicion de los números enteros (4) se deduce que si á uno cualquiera se le aumenta una unidad, se obtiene el número siguiente. De aquí que la *serie natural de los números enteros es ilimitada;* pues por muy grande que sea uno de estos números, agregándole una unidad se obtendrá otro mayor.

NUMERACION.

7. *Numeracion es la parte de la aritmética que trata de expresar los números con pocas voces y pocas cifras ó guarismos.* La reunion de voces y cifras con que se expresan los números, se llama *sistema de numeracion*, y *base* del mismo es el número de cifras de que consta dicho sistema.

La numeracion puede ser *hablada* y *escrita;* hablada es la que expresa los números con pocas voces, y escrita la que los representa con pocas cifras.

Numeracion hablada.

8. La unidad considerada como número se llama *uno;* uno y uno se expresa con la palabra *dos*, y por el aumento sucesivo de la unidad, se van engendrando los números *tres*, *cuatro*, *cinco*, *seis*, *siete*, *ocho*, *nueve* y *diez*.

La reunion de diez unidades se considera como una nueva unidad llamada de *segundo órden* ó *decena*, y se cuenta por decenas lo mismo que por unidades, diciendo: una decena, dos decenas, tres decenas, etc., las que se expresan con los nombres *diez*, *veinte*, *treinta*, *cuarenta*, *cincuenta*, *sesenta*, *setenta*, *ochenta*, *noventa*, y *ciento:* donde vemos que los nombres de los diez primeros números, terminados en *enta*, nos expresan el mismo número de unidades de segundo órden; por ejemplo: *ochenta*, que es el *ocho* terminado segun hemos dicho, nos indica ocho decenas. Se exceptúan de esta regla *diez*, *veinte* y *ciento* que, como se ve, corresponden á una, dos y diez decenas, y que no están terminados en *enta*.

Entre cada dos colecciones de decenas hay nueve números, cuyos nombres se forman añadiendo al de la coleccion inferior, los de los nueve primeros; así, los comprendidos entre veinte y treinta, serán veinte y uno, veinte y dos, etc. Se exceptúan de esta regla los cinco primeros comprendidos entre diez y veinte, que en su lugar se dice *once*, *doce*, *trece*, *catorce*, y *quince*, á partir del cual se sigue la regla general, *diez* y *seis*, *diez* y *siete*, etc.

La reunion de *diez* decenas ó sean *cien* unidades, se considera como una nueva unidad llámada de *tercer órden* ó *centena;* y se cuenta por centenas lo mismo que por unidades, diciendo: *un ciento*, *dos cientos*, etc., hasta *diez cientos*, que se expresa con la palabra *mil*. Estos nombres sufren algunas modificaciones, como *quinientos*, en vez de cinco cientos; *setecientos*, en vez de siete cientos, y *novecientos* en vez de nueve cientos. Los noventa y nueve números que hay entre cada dos colecciones de centenas, se forman añadiendo á la inferior los nombres de los noventa y nueve primeros.

La reunion de *diez centenas* se considera como una nueva unidad llamada de *cuarto órden* ó *millar*, y se cuenta por *millares*, *decenas de millar* y *centenas de millar*, lo mismo que se ha contado por unidades, decenas y centenas simples; dando orígen así á otros dos órdenes de unidades que son las de *quinto* y *sexto*.

La reunion de *diez centenas de millar* compone la unidad de séptimo órden ó millon, de la cual se forman otros seis órdenes, que son *millon*, *decena de millon*, *centena de millon*, *millar de millon*, *decena de millar de millon*, y *centena de millar de millon;* que corresponden á los órdenes respectivos *séptimo*, *octavo*, *noveno*, *décimo*, *undécimo* y *duodécimo*.

El conjunto de *diez centenas de millar de millon* forma el *billon*, y se cuenta por *billones*, *trillones*, *cuatrillones*, etc., del mismo modo que por millones y unidades simples.

9. De aquí resultan dos clases de unidades: unas que llamaremos *principales*, que son las de *primer órden*, del *séptimo* ó *millones*, del *trece* ó *billones*, del *diez y nueve* ó *trillones*, etc.,

las cuales se reproducen de seis en seis; y otras *intermedias*, que son las *decenas*, *centenas*, *millares*, *decenas de millar* y *centenas de millar* de cada uno de estos órdenes principales.

Numeracion escrita.

10. *Escribir con un corto número de signos ó cifras todos los números imaginables, es el objeto de la numeracion escrita;* cosa sumamente fácil, observando que sólo nueve números son los que las necesitan, pues diez de un órden cualquiera componen una unidad del órden superior, segun hemos visto ya en la numeracion hablada; así, pues, los números *uno*, *dos*, *tres*, *cuatro*, *cinco*, *seis*, *siete*, *ocho* y *nueve* se hallan representados por las cifras siguientes:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
uno,	*dos*,	*tres*,	*cuatro*,	*cinco*,	*seis*,	*siete*,	*ocho*,	*nueve*.

Con estas cifras se podrá escribir un número cualquiera, poniendo á cada una un *índice* que nos indique el órden de unidades que representa; pero como esto daria lugar á escribirle poco ménos que en letra, no presentaria la ventaja de la sencillez, y vendrian expresados los números en forma poco á propósito para los cálculos que despues hemos de hacer con ellos. Por lo tanto necesitamos buscar el medio de combinar entre sí estas cifras, de tal modo, que sin necesidad de poner á cada una el índice de que hemos hablado, nos representen las diferentes clases de unidades de que puede componerse un número cualquiera.

Para conseguir esto, se ha convenido en que cada una de estas cifras tenga dos valores: uno *absoluto*, que es el que representa por su figura, y otro *relativo* al lugar que ocupe; conviniendo ademas, en que *una cifra escrita á la izquierda de otra, nos exprese unidades del órden inmediato superior al que ésta representa;* de donde resulta, que el *primer* lugar será para las *unidades simples*, el *segundo* para las *decenas*, el *tercero* para las *centenas*, y así sucesivamente; de manera que si el número que se quiere escribir contiene *todos los órdenes de unidades* *que hay desde el primero hasta el órden superior*, no habrá dificultad en escribirle, pues bastará *ir colocando las cifras que nos expresen las unidades de cada especie, unas á continuacion de otras conforme se vayan pronunciando.*

Sea, por ejemplo, el número que hemos de escribir, *ocho mil cuatrocientos cincuenta y siete millones trescientos sesenta y dos mil ciento noventa y siete.*

Colocando las cifras en el órden que se han pronunciado, obtendremos el número escrito en cifra:

8457362197.

Si el número *no contuviese todos los órdenes comprendidos entre el primero y el último*, entónces, escribiendo las cifras de los órdenes que tuviese, unas á continuacion de otras, no ocuparian sus respectivos lugares, y por consiguiente el número no quedaria bien escrito; es necesario, pues, hacer que cada cifra ocupe su verdadero lugar para que queden representados los diferentes órdenes de unidades del número propuesto. Esto se consigue fácilmente con sólo admitir una nueva cifra que no tenga valor absoluto, y únicamente sirva para ocupar los lugares de los órdenes de unidades de que carezca el número; haciendo por consiguiente, que las demas cifras ocupen su verdadero lugar. Esta cifra es 0, y se llama *cero.*

Sea el número *noventa millones siete mil trescientas ocho unidades;* el cual quedará escrito así:

90007308.

En efecto, *noventa millones*, son 9 unidades del octavo órden; *siete mil*, son 7 del cuarto; los órdenes séptimo, sexto y quinto que pasan en silencio, se ocupan con ceros; despues siguen *trescientas ocho* unidades, dejando en claro las decenas, por lo que se colocan el 3 y 8 con un *cero* intermedio.

De modo, que teniendo cuidado de los órdenes que se *dicen* y de los que *se pasan en silencio*, representando los primeros por *las cifras que les correspondan*, y con *ceros* los segundos, se tendrá el número escrito; y nombrando cada cifra segun el órden que ocupe, quedará el número leido en el lenguaje ordinario.

11. Fácil es comprender, por lo que llevamos dicho, cuán necesario es para poder escribir un número en cifra, y dado escrito así, leerlo en el lenguaje ordinario, saber á primera vista el lugar que corresponde á cada clase de unidades, y al contrario; pero esto es muy sencillo, atendiendo á la division que hemos hecho de las unidades en principales é intermedias (9); las principales que se reproducen de seis en seis órdenes y que son las *unidades*, *millones*, *billones*, *trillones*, *cuatrillones*, etc., tienen por lugares respectivos el *uno*, *siete*, *trece*, *diez y nueve*, *veinte y cinco*, etc., de modo, que el lugar de una cualquiera es igual al de la anterior aumentado en seis; de donde podremos concluir que el lugar de una unidad principal cualquiera, es igual *á tantas veces seis, como indique el órden de esta misma unidad, más uno*. Así, el lugar de los cuatrillones es el veinte y cinco: porque el cuatrillon es la cuarta á contar del millon, luego el seis se hallará repetido cuatro veces, lo que da veinte y cuatro, y uno que se añade, veinte y cinco.

Sabiendo de memoria los lugares de estas unidades principales, y el órden de las intermedias, será muy fácil hallar el de un órden cualquiera, pues no habrá más que *agregar al órden principal el de la intermedia*.

Propongámonos hallar el lugar correspondiente á las *decenas de millar de trillon*, y veremos, que siendo el lugar de los trillones el *diez y nueve*, y el de las decenas de millar el *cuarto*, nos dará, reuniendo estos dos números, el lugar *veinte y tres*, que es el de las unidades dadas.

Por el contrario, dado el lugar de un órden, hallar este órden será tambien muy sencillo; porque el lugar que se nos da, ó *es uno de los correspondientes á las unidades principales*, el cual se deberá saber de memoria, ó *está comprendido entre dos*, en cuyo caso *el inferior nos indicará el órden principal*, y *el exceso de éste al lugar dado será el de la intermedia;* el lugar veinte y ocho, por ejemplo, le ocupan los millares de cuatrillon, porque siendo el veinte y cinco el órden de los cuatrillones, y la diferencia de veinte y cinco á veinte y ocho, siendo tres, este será el órden de la intermedia; y como la tercera unidad intermedia es el millar, se deduce, que el lugar veinte y ocho corresponderá á los millares de cuatrillon: del mismo modo se veria que el diez y siete son decenas de millar de billon.

Para concluir la numeracion nos falta únicamente deducir las reglas prácticas que se siguen para escribir y leer los números.

Como un órden cualquiera de unidades principales no consta más que de seis órdenes diferentes, se sigue, que sabiendo escribir números de seis cifras, queda resuelto el problema de escribir un número cualquiera; porque sólo quedará reducido á escribir los diferentes órdenes principales, teniendo cuidado del órden de éstos, y que entre cada dos consecutivos haya siempre cinco intermedios. Sea el número *ochenta y tres trillones cuatrocientos siete mil novecientos millones ochocientas mil cuatrocientas siete unidades*. Vemos que hay ochenta y tres *trillones*, ningun *billon*, cuatrocientos siete mil novecientos *millones*, y ochocientas mil cuatrocientas siete *unidades;* por lo tanto el número quedará escrito así:

83.000000,407900.800407.

Si por el contrario se hubiera dado para leer el número

7431.030003,200407.000432,

veriamos que reproduciéndose las unidades principales de seis en seis órdenes, *dividiendo este número en períodos de seis cifras, principiando por la derecha, cada una de estas divisiones marcará un órden principal; de modo que leyendo cada uno de estos períodos y dándoles la denominacion correspondiente, quedará el número leido:* así, el número propuesto será: *siete mil cuatrocientos treinta y un trillones treinta mil tres billones doscientos mil cuatrocientos siete millones cuatrocientas treinta y dos unidades.*

LECCION II.

Adicion de números abstractos. — Sustraccion de números abstractos. — Alteraciones que experimentan la suma y resta cuando varian los datos. — Pruebas de ámbas operaciones.

Adicion de números abstractos.

12. *Sumar, es reunir varios números en uno solo.* Los números que se dan para sumar se llaman *sumandos*, y el resultado *suma*. El signo de sumar es + que se lee *más* y se escribe entre los sumandos; el resultado se indica con el signo = que se lee *igual á*.

En la suma distinguiremos tres casos: 1.°, *sumar varios números dígitos*, que son los que no tienen más que una cifra; 2.°, *varios polidígitos ó de varias cifras, cuyas sumas parciales de sus diferentes órdenes, no lleguen á diez*, y 3.°, *varios polidígitos cualesquiera.*

Primer caso. Para sumar números dígitos, basta agregar una por una las unidades de cada cifra al número que vaya resultando, lo que en la práctica se hace agregando desde luégo las unidades de cada cifra.

Sean los números que hemos de sumar 5, 4, 7 y 8. Se indicará la operacion y resultado así:

$$5 + 4 + 7 + 8 = 24.$$

Segundo caso. Como la suma ha de ser igual al conjunto de todos los órdenes de los sumandos, si efectuamos todas estas sumas y ponemos cada una de las cifras que las representan en su lugar, tendremos el número pedido.

Sean los números que hemos de sumar 113, 231, 121 y 224; de modo que se tendrá:

$$113 + 231 + 121 + 224 = 689.$$

Cuyo número se ha obtenido sumando primero las unidades, luégo las decenas, y por último las centenas; y siendo estas sumas respectivas 9, 8 y 6, colocando estas cifras en su lugar correspondiente, hemos hallado el número 689, que se compone de todas las unidades, decenas y centenas de los sumandos.

13. En la práctica es más cómodo escribir los sumandos unos debajo de los otros de modo que se correspondan las unidades de la misma especie; porque entónces al sumar los diferentes órdenes, no tendremos que atender sino á sumar en columnas verticales; al paso que del otro modo, deberemos ir con mucho cuidado, para no sumar unidades de diferentes órdenes. El ejemplo anterior se dispondrá por lo tanto así:

$$\begin{array}{r} 113 \\ 231 \\ 121 \\ 224 \\ \hline 689 \end{array}$$

Tambien debemos observar que, en este caso que nos ocupa, podemos principiar á sumar por cualquier órden de unidades, con tal que se sumen todas, y que las sumas parciales se coloquen en sus lugares respectivos.

TERCER CASO. Del mismo modo que en el anterior, se suman todos los órdenes de unidades; pero como las sumas parciales podrán pasar de 9, se necesita más de una cifra para representarlas; de manera que todas, á excepcion de la primera de cada suma parcial, expresarán las unidades del órden inmediato superior, á las cuales se deben agregar: luego si sumamos todos estos órdenes de unidades, principiando por las de especie inferior, y escribimos sólo la primera cifra de cada suma, reservando las decenas de cada especie para agregarlas á la suma parcial siguiente, resultará el número compuesto de todos los órdenes de unidades de los sumandos, que será la suma pedida.

Propongámonos hallar la suma de los números 847, 379, 498, 839 y 235.

Por la razon expuesta en el caso anterior, se dispondrá la operacion así:

$$\begin{array}{r} 847 \\ 379 \\ 498 \\ 839 \\ 235 \\ \hline 2798 \end{array}$$

La suma de las unidades, hallada segun el primer caso, es 38; las 8 unidades las hemos colocado debajo de esta especie, y las 3 decenas las hemos agregado á las decenas, lo que nos ha dado el número 29; escribimos las 9 en su lugar, y las 2 unidades del órden siguiente las sumamos con las centenas, dando por resultado 27, que escribimos en su lugar por no haber más órdenes, con lo cual queda determinada la suma total pedida 2798.

Si hubiésemos principiado á sumar por las unidades de especie superior, hubiéramos tenido que modificar las cifras de las unidades sumadas ó que hacer otra suma. En efecto, considerando el mismo ejemplo y principiando á sumar por las centenas, obtendremos por primera suma 25, que colocamos

$$\begin{array}{r} 847 \\ 379 \\ 498 \\ 839 \\ 235 \\ \hline 2568 \\ 23 \\ \hline 2798 \end{array}$$

en su lugar; la suma de las decenas es 26; colocando cada una de estas cifras en sus respectivos lugares y haciendo lo mismo con las 38 unidades, observamos que para obtener el resultado final hay que hacer la segunda suma de las 2568 unidades y 23 decenas, lo cual se evita principiando á sumar por la derecha. De lo que podremos deducir la regla general siguiente:

14. *Para sumar números enteros se escriben los sumandos unos debajo de otros de modo que se correspondan las unidades de una misma especie, se tira una raya por debajo y se suman respectivamente todos los órdenes de unidades, principiando por las de especie inferior, y si de estas sumas parciales resulta alguna unidad del órden superior, se reserva para sumarla con este órden, escribiendo solamente la cifra de las unidades de cada especie.*

Sustraccion de los números abstractos.

15. *La sustraccion es el análisis de la adicion, y tiene por objeto, dada la suma de dos sumandos y uno de éstos, hallar el otro.* La suma toma el nombre de *minuendo*, el sumando conocido el de *sustraendo*, y el que se busca se llama *resto, exceso ó diferencia*. El signo de restar es una raya — que se lee *ménos*.

Como el número que vamos buscando ha de ser tal, que sumado con el sustraendo nos ha de dar el minuendo, se sigue, que lo que se trata de hallar es el número que le falta al sustraendo para ser igual al minuendo; pero lo que le falta á un número para ser igual á otro, es la diferencia que hay entre los dos; por eso dicen algunos que *restar es hallar la diferencia que hay entre dos números;* y como para hallar esta diferencia no hay más que quitar del mayor el menor, por eso tambien se dice, que *restar es quitar un número de otro*. Pero como fácilmente se comprende, todas estas definiciones se deducen de la primera, puesto que no son más que aplicaciones suyas.

16. En la resta distinguiremos tambien tres casos, correspondientes al análisis de los tres que hemos considerado en la suma: 1.° que el minuendo y el sustraendo sean números dígitos, ó polidígito el minuendo que no llegue á 19, y dígito el sustraendo, debiendo serlo tambien el resto; 2.° que sean polidígitos, pero que cada cifra del minuendo no sea menor que su correspondiente del sustraendo; 3.° que sean dos polidígitos cualesquiera.

Primer caso. Sabiendo de memoria la suma que dan dos cifras cualesquiera, será fácil determinar una de ellas conociendo la suma de las dos y la otra cifra, para lo cual bastará quitar de la suma, cada una de las unidades de la cifra conocida; ó ver las unidades que es necesario añadir á dicha cifra para hallar la suma.

Sean los números que se han de restar 7 y 3; el número que sumado con 3 da 7, evidentemente es 4; luego $7 - 3 = 4$.

Si de 15 quisiéramos restar 6, hallariamos 9 por resultado; porque 9 sumado con 6 nos da 15; luego $15 - 6 = 9$.

Segundo caso. Las cifras del número que vamos buscando han de ser tales que, sumadas con sus correspondientes del sustraendo, nos han de dar las del minuendo; luego restando de cada una de las cifras de éste la correspondiente del sustraendo, lo que siempre es posible en este caso, hallaremos las diferentes cifras del resto.

Sean los dos números que hemos de restar 8573 y 3152.

$$\begin{array}{r} 8573 \\ 3152 \\ \hline 5421 \end{array}$$

Dispuesta la operacion del modo que se ve, hallaremos el resultado restando de cada cifra del minuendo su correspondiente del sustraendo; así, diremos $3-2=1$; $7-5=2$; $5-1=4$; $8-3=5$.

Este caso, como hemos visto, no ofrece dificultad, y en él puede principiarse á restar por cualquier órden de unidades, con tal que se resten todas.

Tercer caso. Lo mismo que en el anterior colocaremos el sustraendo debajo del minuendo de modo que se correspondan las unidades de un mismo órden, y se restará cada cifra del sustraendo de su correspondiente del minuendo; pero como algunas de estas restas no serán posibles por ser el minuèndo menor que el sustraendo, tendremos que descomponer una unidad de la cifra del órden inmediato superior en unidades de la inferior; porque el ser menor dicha cifra del minuendo, depende de que la suma de las cifras del sustraendo y resto ha producido una unidad del órden superior, la cual es la que descomponemos en esta especie para obtener la verdadera suma: buscando, pues, la cifra que sumada con la del sustraendo nos produce la del minuendo aumentada en diez, obtendremos las unidades de esta especie del resto. Despues consideraremos con una unidad ménos la cifra de la cual se tomó dicha unidad.

Podrá suceder, que al ir á tomar una unidad del órden inmediato superior, no la haya, en cuyo caso se pasará hasta llegar á la primera cifra significativa, de la cual se tomará, y descomponiéndola en diez unidades de la especie inferior, se dejarán 9 en este lugar, agregando la restante al inmediato inferior; y así se continúa hasta llegar á la cifra de la cual no pudo restarse la correspondiente del sustraendo.

Supongamos que se han de restar los números 30416 y 15489.

$$\begin{array}{r} 30416 \\ 15489 \\ \hline 14927 \end{array}$$

Dispuesta la operacion como se ve, por la razon expuesta ya (13), principiaremos por hallar la cifra que sumada con 9 nos produce 6, y como no es posible, se deduce que dicha suma ha debido componer una decena, la cual descompuesta en unidades nos da 10, y 6 que tenemos en su lugar 16, que es la suma que debe producir la cifra 9 con la que vamos buscando; pero la cifra que sumada con 9 nos produce 16 es 7; luego 7 será la cifra de las unidades. La cifra 1 se ha convertido en 0; luego tomando una centena y descomponiéndola en sus diez decenas, tendremos la suma de la cifra 8 y la que se busca, que será 2. La cifra 4 se convirtió en 3, de la cual no se puede restar 4, por lo que necesitamos descomponer una unidad del órden superior; pero como no la hay, pasaremos á la siguiente, tomaremos una unidad que descompondremos en 10 de la inmediata inferior, de las cuales dejaremos 9 en su lugar, y la restante se descompondrá en otras 10 de la especie inferior, que unidas con las 3 que teniamos, nos dará la suma 13; el número que sumado con 4 da 13, es 9, que será la cifra de las centenas; el 0 se convirtió en 9; 9 ménos 5, igual 4; y por último, 2 ménos 1, igual á 1, cifra del órden superior.

De lo dicho se deduce, que debemos principiar á restar por las unidades de primer órden, para que en el caso de ser alguna cifra del minuendo menor que su correspondiente del sustraendo, se pueda tomar del órden superior la unidad que se necesita para poder efectuar dicha resta, lo cual no podria hacerse si principiásemos por las del órden superior. Por lo tanto diremos que:

17. *Para restar un polidígito de otro, se escriben de modo que se correspondan las unidades de una misma especie, se tira*

una raya por debajo y se resta de cada cifra del minuendo su correspondiente del sustraendo, principiando por la derecha; y si alguna cifra del minuendo fuese menor que su correspondiente del sustraendo, se tomará una unidad del órden superior y se descompondrá en unidades de la especie que se va á restar, teniendo cuidado de considerar con una unidad ménos la cifra de la cual se tomó.

Alteraciones que experimentan los resultados de la adicion y sustraccion segun las que sufren sus términos.

18. De lo dicho en la adicion se deduce que aumentando uno de los sumandos en una cierta cantidad, la suma vendrá aumentada en la misma cantidad; y si á cada uno de los sumandos se aumenta una cierta cantidad, la suma vendrá aumentada en la de los números que se aumentaron á los sumandos. Si por el contrario, se disminuye á uno ó varios sumandos una ó varias cantidades, la suma vendrá disminuida en la de dichas cantidades: de donde se deduce, que si á uno ó varios sumandos se les aumenta en ciertas cantidades, y á otros se les disminuye en otras, la suma vendrá aumentada ó disminuida en la diferencia que hay entre las sumas de las cantidades que se aumentaron y disminuyeron, segun que la primera sea mayor ó menor que la segunda. En el caso de ser la suma de los números que se aumentaron igual á la de los números que se disminuyeron, el resultado no sufre alteracion.

19. Si una suma compuesta de dos sumandos no sufre alteracion, habiendo aumentado uno de ellos, el otro, por compensacion, habrá disminuido en dicha cantidad. Si la suma viniese aumentada en la cantidad que se agregó á un sumando, el otro debe permanecer constante. De donde se deduce, que siendo el minuendo la suma del sustraendo y resto, éste aumentará ó disminuirá en tantas unidades como aumente ó disminuya el minuendo; y disminuirá ó aumentará en el mismo número de unidades que aumente ó disminuya el sustraendo; y siempre que ámbos términos aumenten ó disminuyan en una misma cantidad, el resto no sufrirá alteracion.

De aquí se deduce la regla siguiente:

20. *Para restar dos números,* despues de colocados de modo

que se correspondan las unidades de una misma especie, *se resta de cada cifra del minuendo su correspondiente del sustraendo, y si alguna de estas restas parciales no fuese posible, á causa de ser la cifra del minuendo menor que la del sustraendo, se hará que lo sea, añadiendo mentalmente diez unidades á la cifra del minuendo, lo cual quedará compensado aumentando en una unidad la cifra siguiente del sustraendo.*

En muchas ocasiones nos vemos obligados á restar de cada cifra de un número, otro mayor que diez, en cuyo caso *se le añade mentalmente á esta cifra un número tal de decenas de aquella especie para que se pueda efectuar dicha resta; teniendo cuidado de añadir á la siguiente cifra del sustraendo tantas unidades como decenas se aumentaron á la primera.*

Pruebas de la adicion y sustraccion.

21. *Se llama prueba de una operacion, otra que, siendo más sencilla, tiene por objeto justificar la exactitud de la primera.*

La mejor prueba de la adicion es repetir sus diferentes sumas parciales principiando de abajo arriba, si ántes, como es natural, se hizo de arriba abajo; porque las equivocaciones en esta operacion dependen generalmente del vicio que adquiere el oido, cuyo vicio desaparece cuando las palabras se pronuncian en distinto órden.

La prueba de la sustraccion es sumar el sustraendo con el resto, y la suma debe ser igual al minuendo, segun la definicion (15).

LECCION III.

Multiplicacion de números abstractos. — Propiedades importantes de la multiplicacion.

Multiplicacion de números abstractos.

22. *Multiplicar dos números es hallar un tercero que sea respecto de uno de ellos lo que el otro es respecto de la unidad.*

El número que se multiplica se llama *multiplicando*, aquel por que se multiplica *multiplicador*, y el resultado *producto*. El multiplicando y multiplicador se llaman tambien *factores del producto*. El signo de multiplicar es un punto ó una cruz en forma de aspa, que se pone entre los factores y se lee *multiplicado por*. Así, 2 . 3 ó 2 × 3, nos indica el producto de 2 por 3 y se lee: dos multiplicado por tres.

De la definicion se deduce, que si fuesen enteros los factores de un producto, se hallaria éste repitiendo uno de ellos tantas veces por sumando como unidades tiene el otro, es decir, que si uno de ellos, el que hace de multiplicador, contuviese á la unidad tres veces, ó lo que es lo mismo, fuera 3, el producto seria igual á la suma de tres números iguales al multiplicando; más claro, seria el mismo multiplicando repetido por sumando 3 veces: de donde se deduce la definicion que se acostumbra dar de la multiplicacion, diciendo que *multiplicar dos números es repetir por sumando á uno de ellos tantas veces como unidades contiene el otro*. Y como el número que así resulta, es tantas veces mayor que el multiplicando como veces contiene á la unidad el multiplicador, de aquí que algunos definan tambien la multiplicacion diciendo que *multiplicar dos números es hacer tantas veces mayor á uno de ellos como unidades tiene el otro*. Pero todas estas definiciones sólo son aplicables al caso de ser enteros los factores, ó por lo ménos el multiplicador; por lo que no podemos admitirlas como definiciones generales, sino como casos particulares de la que dimos al principio.

23. En la multiplicacion distinguiremos tres casos: 1.° *multiplicar un dígito por otro*; 2.° *un polidígito por un dígito*, y 3.° *dos polidígitos*.

Primer caso. Para multiplicar un dígito por otro, hay necesidad de saber de memoria la tabla de multiplicar, que es aquélla en la cual se hallan contenidos los productos que resultan de multiplicar una cifra por otra.

Expondremos la llamada de Pitágoras, que es digna de ello por lo ingeniosa y sencilla.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Consiste en un cuadrado formado de nueve filas horizontales de números, que dejan formadas entre sí otras nueve filas verticales, como se ve en la tabla. La primera fila horizontal, lo mismo que la vertical, es la serie natural de los números 1, 2, 3, etc., hasta 9. Las segundas, horizontal y vertical, se obtienen sumando cada número de las primeras consigo mismo, y por lo tanto equivalen á los productos de los números de las primeras filas por 2. Las terceras resultan de sumar los números de la segunda con sus respectivos de la primera, de modo que cada número de la tercera fila expresa los productos de los números de la primera por 3; y así sucesivamente se forman las filas restantes. Por consiguiente, formándose las líneas horizontales de la misma manera que las verticales, un número cualquiera tomado en este cuadro, nos expresará el producto de las dos cifras que haya en la primera fila vertical y horizontal correspondientes, puesto que este número contendrá á la cifra que hay en la fila vertical, tantas veces como filas horizontales hay, ó lo que es igual, tantas veces como unidades tenga la cifra de la primera fila vertical. Del mismo modo se veria que contiene á la de la columna vertical tantas veces como unidades tiene la de la fila horizontal; luego *para hallar el producto de dos cifras, se busca el punto de concurso de las dos filas horizontal y vertical á que corresponden ámbas cifras, y el número que allí se encuentre, será el producto.*

Supongamos que hemos de multiplicar 7 por 5; la operacion se indicará $7 \times 5 = 7 \, . \, 5$, y hallaremos el producto 35 por medio de la tabla, viendo que 35 es el punto de concurso de la séptima fila horizontal con la quinta vertical, ó la séptima vertical con la quinta horizontal.

Segundo caso. La multiplicacion de un polidígito por un dígito se reduce á multiplicar sucesivamente dos dígitos entre sí, porque segun la definicion, en el caso de ser el multiplicador entero, el producto se podrá hallar repitiendo por sumando al multiplicando, tantas veces como unidades tenga el multiplicador; y como para hallar esta suma tendriamos que repetir un mismo número de veces las cifras de cada uno de los órdenes de unidades del multiplicando, de aquí que, se tendrá el producto pedido, haciendo la multiplicacion de cada una de estas cifras por la del multiplicador, principiando por las unidades de primer órden, y escribiendo de estos productos solamente la cifra de las unidades, reservando las decenas respectivas para agregarlas al producto parcial siguiente.

Sean, por ejemplo, los números que se han de multiplicar 347 y 5.

$$\begin{array}{r} 347 \\ \times 5 \\ \hline 1735 \end{array}$$

Dispuesta la operacion como se ve, queda reducida á sumar ó repetir el 347 cinco veces; lo cual se conseguirá repitiendo primero las 7 unidades, despues las 4 decenas y por último las 3 centenas; lo que se consigue diciendo: $5 \times 7 = 35$ unidades, de las que escribimos 5, reservando las 3 decenas para agregarlas al producto de las decenas; $4 \times 5 = 20$; 20 y 3, son 23; escribimos las 3 unidades de segundo órden y las 2 restantes las unimos al producto de $3 \times 5 = 15$, resultando el número

17, que escribiéndole á la izquierda, por no haber más unidades, obtenemos el número 1735, que es el producto pedido.

24. Luego para multiplicar un polidígito por un dígito, *se multiplican todas y cada una de las cifras del polidígito por el dígito, principiando por las de menor órden; y si alguno de estos productos parciales contiene unidades del órden superior, se reservan para unirlas al producto parcial siguiente, escribiendo tan sólo la cifra de las unidades.*

Tercer caso. Antes de considerar la multiplicacion de dos polidígitos en general, conviene que hallemos el producto de un número cualquiera por la unidad seguida de ceros; y por una cifra significativa seguida tambien de ceros.

25. *Para multiplicar un número por la unidad seguida de ceros, se colocan á la derecha del número tantos ceros como tiene la unidad.*

En efecto, al colocar á la derecha de un número, uno, dos ó más ceros, se le hace diez, ciento, etc. veces mayor, porque cada una de sus cifras ocupa el lugar de un órden de unidades que es diez, ciento, etc., veces mayor; y por consiguiente el número queda multiplicado por 10, 100, etc.

Así, $$324 \times 100 = 32400.$$

26. *Para multiplicar un número por una cifra significativa seguida de ceros, se multiplica el número por dicha cifra, y al producto se añaden tantos ceros como tiene la cifra significativa.*

En efecto, si suponemos que el multiplicando se ha repetido por sumando el número de veces que nos expresa el multiplicador, que es lo que se pide, podrémos agrupar estos números de tantos en tantos como nos indique la cifra significativa; y es evidente que tendrémos tantos grupos como nos expresa la unidad seguida de tantos ceros como tiene el multiplicador; de manera que hallando uno de estos grupos, y despues multiplicándole por la unidad seguida de tantos ceros como tiene la cifra significativa, obtendrémos el resultado pedido; pero uno de estos grupos se halla multiplicando el número propuesto por la cifra significativa, y éste se multiplica por la unidad seguida de ceros, poniéndole á la derecha estos ceros; luego queda demostrado que para multiplicar un número cualquiera por una cifra significativa seguida de ceros, se multiplica el número por dicha cifra, y al producto se le añaden á la derecha tantos ceros como le siguen.

Así, $243 \times 300 = 72900.$

Aplicando á este ejemplo el raciocinio anterior, veremos, que multplicar 243 por 300 es repetirle por sumando 300 veces, y si lo suponemos hecho en una columna vertical, podrémos formar 100 grupos conteniendo cada uno 3 veces al sumando, y como uno de estos grupos se halla multiplicando el número 243 por 3, lo cual da el número 729, repitiéndole 100 veces, tendremos el resultado pedido.

$$\left.\begin{matrix}243\\243\\243\end{matrix}\right\}=729$$
$$\left.\begin{matrix}243\\243\\243\end{matrix}\right\}=729$$
$$\left.\begin{matrix}\cdots\\\cdots\\\cdots\end{matrix}\right\}=\cdots$$

De donde se deduce, *que el producto de un número por un cierto órden de unidades, es siempre del órden que expresan estas unidades.*

Considerados estos casos particulares, podemos pasar al caso general de multiplicar un polidígito por otro.

Segun la definicion (22), hemos de repetir el multiplicando tantas veces como unidades contiene el multiplicador; pero descomponiendo éste en sus diferentes órdenes de unidades, se convertirá en la suma de las diferentes cifras seguidas respectivamente de ninguno, uno, dos, etc. ceros, segun expresen unidades de primero, segundo, tercero, cuarto, etc. órden: de modo, que repitiendo el multiplicando tantas veces como indica cada uno de estos sumandos, y reuniendo todos estos productos parciales, tendremos el producto total; y como estos productos parciales de un número por una cifra significativa seguida de ceros se hallan, segun el caso particular anterior, multiplicando el número por cada cifra significativa, siendo del mismo órden que la cifra por que se multiplica, se sigue que

27. *Para multiplicar dos polidígitos, se multiplica todo el multiplicando por cada cifra del multiplicador, se colocan estos productos los unos debajo de los otros de modo que se corresponda la primera cifra de cada uno con su correspondiente*

del multiplicador, se suman, y el resultado será el producto total.

Supongamos que se ha de multiplicar el número 37548 por 3042: dispondremos la operacion del modo siguiente:

$$\begin{array}{r} 37548 \\ \times\, 3042 \\ \hline 75096 \\ 150192 \\ 112644 \\ \hline 114221016 \end{array}$$

Descomponiendo el multiplicador 3042 en sus diferentes unidades, queda reducida la cuestion á repetir el multiplicando 2, 40 y 3000 veces. Para repetirle 2 veces, se le multiplica por 2, y nos da el primer producto 75096 unidades; para repetirle 40 veces, se multiplica por 4, y el producto 150192 se considera como decenas, por ser tambien decenas el 4, de modo que se colocará debajo de las decenas; y por último se repetirá 3000 veces multiplicándole por 3 y considerando este producto como millares, por ser de este órden la cifra 3, lo que nos da el producto parcial 112644 millares, el cual colocado en su lugar, y sumando los tres productos parciales, nos da el producto total 114221016.

Componiéndose el producto, como hemos visto, de la suma de los productos parciales que resultan de multiplicar todo el multiplicando por cada cifra significativa del multiplicador, considerados con su valor relativo, se sigue, que es de todo punto indiferente principiar la multiplicacion por cualquier órden de unidades, con tal que se observen las reglas predichas; sin embargo, el uso y la comodidad hacen que se principie siempre por las unidades de especie inferior, y se continúe sucesivamente hasta la superior.

28. Observacion. Si consideramos todas las unidades de una especie cualquiera de un producto, todos los millares por ejemplo, el número de estos millares se compondrá de dos partes:

1.ª del producto de todo el multiplicando por todos los millares del multiplicador; 2.ª de todas las unidades de millar que provengan de la suma de los productos parciales del multiplicando por las cifras de los órdenes inferiores del multiplicador.

La primera parte podrá ser cero en algunos casos, lo cual se verificará cuando en el multiplicador no existan unidades de la misma especie, es decir, millares. La segunda siempre será un número menor que el multiplicando: porque para obtener en un producto un número de millares igual al multiplicando, es menester que el multiplicador sea por lo ménos igual á *mil;* y como todos los órdenes de unidades inferiores no llegan á componer un millar, de aquí que *los millares que provienen de la suma de los productos parciales del multiplicando por las cifras de órden inferior del multiplicador, nunca llegan á componer un número igual al multiplicando*, segun queriamos demostrar.

Lo mismo que se ha dicho de los millares, podria decirse de otro órden cualquiera de unidades.

Propiedades importantes de la multiplicacion.

29. 1.ª *El órden de factores no altera el producto; es decir, que* $3 \times 4 = 4 \times 3$.

En efecto, cualquiera que sea el multiplicando, podemos descomponerle en la reunion de sus unidades; y repitiéndole en líneas horizontales tantas veces como contenga á la unidad el multiplicador, resultará un cuadro de unidades cuya suma, de cualquier modo que se halle, expresará el producto del multiplicando por el multiplicador. Ahora bien, sumando por líneas horizontales, nos dará por resultado tantos números iguales al multiplicando como unidades contiene el multiplicador; y contando por columnas verticales, hallaremos tantos números iguales al multiplicador como unidades contiene el multiplicando; y como ámbas sumas son iguales, se sigue, que lo mismo es repetir el multiplicando tantas veces como unidades tiene el multiplicador, que repetir el multiplicador tantas veces como unidades tiene el multiplicando.

Sea, por ejemplo, 3×4; segun el raciocinio anterior, se tendrá

$$\begin{array}{c}
3 = 1 + 1 + 1 \\
3 = 1 + 1 + 1 \\
3 = 1 + 1 + 1 \\
3 = 1 + 1 + 1 \\
\hline
12 = 4 + 4 + 4
\end{array}$$

Sumando por líneas horizontales se tiene 3×4, ó sea el número 3 repetido 4 veces; y sumando por columnas verticales se tiene 4×3, ó 4 repetido 3 veces; y como la suma siempre es la misma, se deduce que $3 \times 4 = 4 \times 3$, segun queriamos demostrar.

2.ª *Un producto tiene tantas cifras como hay en ámbos factores, ó una ménos.*

En efecto, cualesquiera que sean los factores, podremos hallar los productos de uno de ellos, por el menor número de tantas cifras como tiene el otro, y por el menor de una cifra más; es decir, por la unidad seguida de tantos ceros como cifras tiene dicho número, ménos una, y por la unidad seguida de igual número de ceros. Es evidente que estos dos productos comprenderán á todos los que resulten de multiplicar el multiplicando por cualquier número comprendido entre los anteriores. Pero estos productos límites se forman de las cifras del multiplicando seguidas de tantos ceros como cifras hay en el multiplicador y tantas ménos una; y por consiguiente el producto que se halle comprendido entre ellos, tendrá por lo ménos tantas cifras ménos una como hay en el multiplicando y multiplicador, y á lo más, tantas como hay en ámbos factores.

Sean los dos números 4346 y 325; el menor número de tres cifras es 100, y 1000 evidentemente es mayor que 325; luego siendo el producto de 4346 por 1000, igual á 4346000, es decir, á un número compuesto de tantas cifras como hay en ámbos factores, el producto del número propuesto por 324 no podrá tener más cifras que hay en ámbos factores, y como el mismo número multiplicado por 100 se compone de las cifras del multiplicando seguidas de tantos ceros como cifras tiene el multiplicador ménos una, tampoco podrá tener ménos cifras que las que hay en ámbos factores ménos una, que es lo que queriamos demostrar.

LECCION IV.

Division de números abstractos.

Division de números abstractos.

30. *La division es el análisis de la multiplicacion; y tiene por objeto, dado el producto de dos factores y uno de éstos, hallar el otro.* El producto toma el nombre de *dividendo*, el factor conocido el de *divisor*, y el que se busca se llama *cociente*. El dividendo y divisor se llaman *términos del cociente*. El signo de dividir es dos puntos que se escriben entre ámbos términos, ó una raya horizontal sobre la que se pone el dividendo y debajo el divisor; así, la division del número 12 por 4, se indica $12 : 4$, ó $\frac{12}{4}$, y se lee 12 *dividido* por 4.

De la definicion se deduce, que el divisor multiplicado por el cociente, debe dar el dividendo, y por tanto, éste deberá contener al divisor tantas veces como unidades tenga el cociente; luego podremos hallarle restando el divisor del dividendo todas las veces que se pueda, en cuyo caso el número de restas será el cociente buscado; pero este procedimiento no se emplea, por ser en general bastante largo.

Se observa ademas, que no siempre estará el divisor contenido en el dividendo un número exacto de veces, es decir, que despues de haber quitado el divisor del dividendo todas las veces que sea posible, podrá quedar un resto menor que dicho divisor, en cuyo caso la division se llama *inexacta*, ó imposible en números enteros; porque efectivamente no hay ningun número entero que multiplicado por el divisor nos dé el dividendo. Con todo, podremos siempre hallar el número llamado *cociente entero*, que multiplicado por el divisor nos da el mayor producto contenido en el dividendo, *siendo dicho dividendo igual al producto del divisor por el cociente entero, más el residuo.*

Para conseguir esto y deducir la regla general de la division, debemos considerar tres casos, correspondientes á los tres explicados en la multiplicacion: 1.° *dividir un número de una ó dos cifras por un dígito*, debiendo ser dígito tambien el cociente; 2.° *dividir un polidígito por otro*, siendo el cociënte de una sola cifra; y 3.° *un polidígito cualquiera por otro*, siendo tambien polidígito el cociente.

PRIMER CASO. Para hallar la cifra del cociente que multiplicada por el divisor nos ha de dar el dividendo, basta la tabla de multiplicar (24); porque es evidente que conociendo los dos factores y su producto, siempre que se dé éste y uno de aquellos, el otro es conocido. Si el dividendo que se da como producto no es ninguno de los que hay contenidos en la tabla, estará comprendido entre dos, de modo que tomando la cifra correspondiente al menor, se tendrá el cociente entero; el resto será la diferencia que hay entre el producto menor y el dividendo. Sea, por ejemplo, el número 35 el que se ha de dividir por 7. Como el número 35 se halla en los productos del 7 y corresponde á la cifra 5, se sigue que ésta será el cociente; pero si el dividendo hubiera sido 38, número que no se halla en los productos del 7, podemos sin embargo observar que se halla comprendido entre los dos productos 35 y 42 correspondientes á las cifras 5 y 6; luego el cociente entero será 5 y el resto 3, diferencia que hay entre 35 y 38; luego $38 = 7 \times 5 + 3$.

Aunque generalmente se toma por cociente entero el número correspondiente al menor, hay ocasiones en que conviene tomar el correspondiente al mayor, lo que se hará siempre que el dividendo se halle más próximo al mayor que al menor; en cuyo caso el resto, siendo la diferencia que hay entre el dividendo y el producto en cuestion, se deberá restar de este producto para que nos dé el dividendo; es decir, *que este dividendo será igual al producto del divisor por el cociente entero ménos el residuo.* Cuando se hace esto, se dice que el cociente está aproximado por *exceso* en ménos de una unidad, y en el caso general por *defecto*. Lo mismo se dice en cualquiera otra division.

SEGUNDO CASO. Para dividir un número compuesto de varias cifras por otro tambien de varias cifras, no debiendo tener el cociente más que una, observaremos: que el producto de esta cifra del cociente por la del órden superior del divisor, nos da un producto de este mismo órden superior; de manera que tomando en el dividendo todas las unidades de este órden, en ellas estará contenido el producto de las dos cifras citadas, y ademas las unidades que del mismo órden hayan provenido de la cifra del cociente por todas las dèmas del divisor; luego si dividimos esta parte del dividendo por la primera cifra del divisor, hallaremos una cifra que no podrá ser menor que la buscada; lo que podrá suceder es que sea mayor, y esto se conocerá despues de efectuado el producto del divisor por dicha cifra. En efecto, si este producto es mayor que el dividendo en cuestion, será señal de que la cifra obtenida por la division parcial indicada es mayor que la verdadera, en cuyo caso se baja de unidad en unidad hasta que se halle una cifra que multiplicada por el divisor nos dé un producto igual ó menor que el dividendo, cuya cifra será la verdadera.

Luego para dividir un polidígito por otro, cuyo cociente ha de tener una sola cifra, *se dividirá* (CASO 1.º) *la primera ó dos primeras del dividendo, segun tenga tantas cifras como el divisor ó una más, por la primera cifra del divisor; la cifra hallada se multiplica por el divisor; y si el producto es igual ó menor que el dividendo, la cifra será buena; pero si da un producto mayor, se irán bajando unidades hasta hallar un producto que se pueda restar, en cuyo caso la cifra últimamente ensayada será la verdadera del cociente.*

EJEMPLO 1.º Sean los números 764 y 243 los que se han de dividir.

764	243
35	3

Dispuesta la operacion como se ve, diremos: 7 entre 2 á 3; para ver si 3 es la verdadera cifra, la multiplicaremos por el divisor, y el producto lo restaremos del dividendo, segun la regla (20), diciendo: 3 por 3 nueve, á 14 van 5, y de catorce una; 3 por 4 doce y una trece, á 16 van 3, y de diez y seis una; 2 por 3 seis y una siete, á 7 cero, que por innecesario no se pone. Luego el cociente de dividir 764 por 243 es 3, y el residuo 35: por lo tanto, $764 = 243 \times 3 + 35$.

EJEMPLO 2.° Si los números que se dan para dividir son 3458 y 387, observaremos, que teniendo el dividendo una cifra más que el divisor, hemos de dividir las dos primeras por la primera del divisor, y aunque esta division parcial nos da un número mayor que 9, no pondremos sin embargo más que 9, puesto que estamos en la hipótesis de que el cociente no ha de tener más que una cifra. Ademas, al formar el producto de dicha cifra 9 por el divisor, resulta imposible la resta, pues 35, que es el producto de la cifra 9 por la del divisor 3, aumentado de las unidades procedentes del resto parcial anterior, no se puede restar de las 34 unidades del dividendo; pero bajando una unidad, multiplicando la cifra 8 que resulta por el divisor, y restando el producto del dividendo, obtenemos el residuo 362, y por lo tanto la cifra 8 será el cociente.

$$\begin{array}{r|l} 3458 & 387 \\ \cline{2-2} 362 & 8 \end{array}$$

TERCER CASO. Dividir un polidígito por otro, siendo polidígito el cociente.

La regla de la division de un número polidígito por otro número cualquiera, está fundada en los dos principios siguientes:

PRIMER PRINCIPIO. *Si del dividendo de una division se toman todas las unidades de un cierto órden y se dividen por el divisor, el cociente entero que se halle será igual al número de unidades del mismo órden del cociente.*

Es decir, que si, por ejemplo, tomamos todos los millares del dividendo y los dividimos por el divisor, el cociente entero que hallemos será igual al número de millares del cociente. Ademas, *el residuo de esta division expresará los millares del dividendo que provienen de la suma de los productos parciales del divisor por todo lo que resta del cociente.*

En efecto, siendo el dividendo igual al producto del divisor por el número que se busca, llamado cociente, se tendrá (28), que el número de los millares de dicho dividendo se compondrá de dos partes: primera, del producto del divisor por los millares del cociente; segunda, del número de millares que provienen del producto del divisor por todo lo que resta del cociente.

De modo que si esta segunda parte fuese cero, el cociente de dividir el número de millares del dividendo por el divisor, seria exactamente igual al número de millares del cociente. Si esta segunda parte no es cero, como ademas sabemos (28) que siempre es menor que el divisor, se sigue que al dividir todos los millares del dividendo por el divisor, hallaremos por cociente entero el número de millares del cociente, y por resto la segunda parte de que hemos hablado, es decir, los millares del dividendo que provienen del producto del divisor por todo lo que queda del cociente.

Segundo principio. *Si dividimos todas las unidades de un cierto órden del dividendo de una division por el divisor, y restamos de este dividendo parcial el producto del divisor por el cociente entero hallado, el resto que se obtenga seguido de la inmediata cifra del dividendo dividido por el mismo divisor, nos dará un cociente entero exactamente igual á la cifra del inmediato órden inferior del cociente.*

En efecto, si á la derecha del resto hallado ponemos las cifras que quedan en el dividendo, el número que resulte será evidentemente igual al producto del divisor por todo lo que resta despues de los millares del cociente. Por tanto, si de este número tomamos todas las centenas, es decir, el número que resulta de colocar á la derecha del resto la cifra siguiente del dividendo, y las dividímos por el divisor, el cociente entero que resulte será exactamente igual, segun el principio anterior, á la cifra de las centenas del cociente, ó sea la cifra del mismo órden que expresa la que se coloca á la derecha del resto hallado.

Demostrados estos dos principios, pasemos á la division de un número polidígito por un número cualquiera, y sea, por ejemplo, dividir 121074646 por 34573.

Dispuesta la operacion del modo siguiente,

121074,646	34573
17355 6	3502
69 146	
0	

observaremos que tomando á la izquierda del dividendo el mismo número de cifras que tiene el divisor, el número que resulta es menor que dicho divisor; tomando una cifra más, hallaremos el número 121074, que dividido por el divisor (CASO 2.°) nos da el cociente entero 3 y el residuo 17355.

Ahora bien, el número 121074 expresa todos los millares del dividendo, luego segun el primer principio la cifra 3 será la de los millares del cociente, es decir, la cifra del órden superior del número que se busca. Por consiguiente, *tomando á la izquierda de un dividendo tantas cifras como tiene el divisor, ó una más si el número que resulta es menor que dicho divisor, y efectuando la division de esta porcion del dividendo por el divisor, el resultado que se obtiene es la cifra del órden superior del cociente.*

Si á la derecha del residuo de esta division colocamos la cifra siguiente del dividendo, tendremos el nuevo dividendo parcial 173556, que dividido por el divisor nos da, segun el principio segundo, la cifra 5 que sigue en el cociente á la del órden seperior, es decir, en este caso la de las centenas: luego *multiplicando la primera cifra hallada en el cociente por el divisor, restando el producto de la parte separada en el dividendo, bajando á la derecha del resto obtenido la cifra siguiente del dividendo, y dividiendo el número que resulta por el divisor, hallamos la segunda cifra del cociente.*

Halladas las dos primeras cifras 3 y 5 del cociente, y habiendo restado de la parte separada del dividendo los productos del divisor por cada una de estas cifras consideradas con sus correspondientes valores relativos, el resto 691 que se obtiene, es el mismo que se obtendria restando del dividendo parcial 1210746 el producto del divisor por las centenas 35 del cociente.

Si á la derecha de este resto, que expresa centenas, bajamos la cifra siguiente 4 del dividendo, hallaremos el número 6914, que dividido por el divisor, nos debe dar, segun el principio segundo, la cifra del órden siguiente del cociente, es decir, las decenas; pero como 6914 es menor que el divisor, se sigue que no hay en el cociente unidades de este órden, por lo que pondremos *cero* en su lugar.

Bajando á la derecha de este nuevo resto la última cifra del cociente, y dividiendo el número que resulta por el divisor, hallaremos la cifra 2 de las unidades del cociente; finalmente, multiplicando el divisor por esta última cifra hallada, y restando el producto del dividendo parcial, nos da el resto *cero*, cuyo resultado indica que la division es exacta y que el cociente es 3502.

31. De todo lo dicho se deduce la regla general, que *para dividir un número por otro, se escribe el dividendo y á continuacion el divisor subrayado, separados por dos puntos ó una raya; despues se toman á la izquierda del dividendo tantas cifras como hay en el divisor ó una más si el número que resulta es menor que dicho divisor, se efectúa la division de esta porcion del dividendo por el divisor segun el segundo caso; y el resultado que se obtenga será la cifra del órden superior del cociente; se multiplica esta cifra por el divisor, y el producto se resta de la parte separada á la izquierda del dividendo. Al lado del resto se baja la cifra siguiente, y el número resultante se divide por el divisor, lo que da la segunda cifra del cociente; se multiplica ésta por el divisor, y el producto se resta del dividendo parcial correspondiente. Al lado del resto, se baja la cifra que sigue en el dividendo, y así se continúa hasta que no haya más cifras que bajar; en cuyo caso, si el último resto es cero, la division será exacta y el cociente multiplicado por el divisor dará el dividendo; si no lo es, la division es inexacta y el dividendo será igual al producto del cociente entero por el divisor más el residuo.*

Observaciones. 1.ª Puede suceder que despues de añadir á un resto cualquiera la cifra siguiente del dividendo, el número que resulte sea menor que el divisor, lo cual dará á conocer que no hay en el cociente unidades de aquella especie, y se procederá á determinar la cifra que sigue, poniendo ántes cero en el lugar del órden que falta.

2.ª Cada uno de los restos obtenidos en las divisiones parciales, es menor que el divisor, y por tanto agregándole la cifra que sigue en el dividendo, el número que resulta es menor que diez veces dicho divisor; por cuya razon ninguna division parcial podrá dar por cociente un número entero mayor que 9.

32. Cuando el dividendo y divisor sean bastante crecidos y el cociente deba tener muchas cifras, conviene, para evitar los tanteos que en la práctica se hacen, formar de antemano los

productos del divisor por cada una de las nueve primeras cifras, y no habrá más que ir restando de cada uno de los diferentes dividendos parciales el mayor producto que esté contenido de los nueve formados; teniendo cuidado de ir anotando en el cociente la cifra que corresponda á cada uno de estos productos. Por este medio la operacion de dividir queda reducida á efectuar una serie de restas, lo cual es más sencillo que ejecutar la division por el método ordinario.

Propongámonos, por ejemplo, dividir el número 202693986 por 4653.

Dispondremos esta operacion de la manera siguiente:

```
202693986 : 4653
18612       ------
---------   43562
 16573
 13959
 ---------
  26149
  23265
  ---------
   28848
   27918
   ---------
     9306
     9306
     ----
        0
```

PRODUCTOS DEL DIVISOR POR LAS CIFRAS SIGNIFICATIVAS.	
1.	4653
2.	9306
3.	13959
4.	18612
5.	23265
6.	27918
7.	32571
8.	37224
9.	41877

El mayor producto contenido en el primer dividendo parcial, es 18612, que corresponde á la cifra 4, primera del cociente; puesto debajo y restado de dicho dividendo parcial, da la resta 1657, á la cual agregando la cifra siguiente, da el nuevo dividendo parcial 16573, con el que se hace lo mismo; continuando de este modo llegamos á obtener el cociente 43562 y el resto *cero*, lo cual nos prueba que la division es exacta.

LECCION V.

Operaciones fundamentales con los números concretos. — Aplicacion de las cuatro operaciones á la resolucion de problemas. — Problemas.

Operaciones fundamentales con los números concretos.

33. El cálculo de las cuatro operaciones con números concretos se hace, en cuanto al valor numérico, lo mismo que con números abstractos; pero en cuanto á la especie del resultado hay que tener en cuenta la de los datos.

34. Para sumar varios números concretos, es necesario que todos sean homogéneos, se suman como si fuesen abstractos, y el resultado será de la misma especie de los sumandos.

35. Para restar números concretos, es necesario que minuendo y sustraendo sean homogéneos, se restan como abstractos, y la resta será de la especie del minuendo.

36. En la multiplicacion de números concretos pueden suceder dos casos: que sean de una misma especie, ó que no lo sean; si son de una misma especie, se multiplican entre sí, y el producto será de la especie de los factores, teniendo siempre cuidado de considerar á uno de ellos como abstracto que sólo expresa las veces que el otro se ha de repetir.

Hay que considerar á uno de los factores como abstracto, porque sino daria orígen á errores de gran consideracion. En efecto, supongamos que queremos multiplicar 2 reales por 2 reales: considerando al segundo, por ejemplo, como abstracto que nos indica las veces que hemos de repetir el primero, se tendrá por producto 4 reales; pero si no le considerásemos como abstracto, entónces, como 2 reales es igual á 17 cuartos, el producto de 17 cuartos por 17 cuartos seria tambien 4 reales, lo que no es verdad (*).

Cuando los factores son de distinta especie, se considera al multiplicador, que es de la especie distinta á la que debe resul-

(*) No se considera el caso de multiplicar dos números cuyo resultado debe ser un número de superficie ó volúmen en el cual no hay que hacer tal hipótesis.

tar en el producto, como un número abstracto. Así, si se han de multiplicar 2 reales por 3 varas y sabemos que el producto ha de ser reales, el 3 varas se considerará como abstracto y será 2 reales multiplicado por 3, igual á 6 reales. Si por el contrario el producto ha de ser varas, entónces será 3 varas multiplicado por 2, igual á 6 varas.

37. En la division de números concretos tambien hay que considerar dos casos: que dividendo y divisor sean de una misma especie, ó que no lo sean; si son de una misma especie, el cociente debe considerarse como un número abstracto que expresa las veces que el divisor está contenido en el dividendo. Así, 12 reales dividido por 3 reales es igual á 4, número abstracto.

Si dividendo y divisor son de distinta especie, se efectúa la division como si ámbos fuesen abstractos, y el cociente será de la misma especie del dividendo. Así, 12 reales dividido por 3 varas, da de cociente 4 reales.

Aplicacion de las cuatro operaciones á la resolucion de problemas.

38. Haremos uso de la adicion, *siempre que se tenga que reunir en un solo número los valores de varios.*

39. Haremos uso de la sustraccion, *siempre que se trate de hallar la diferencia que hay entre dos números, ó siempre que debamos quitar ó rebajar un número de otro.*

40. Emplearemos la multiplicacion, 1.°, *cuando se trate de repetir un número por sumando un cierto número de veces*, en cuyo caso se multiplica el número dado por el que expresa las veces que se ha de repetir; 2.°, *cuando dado el valor de una unidad, se quiere hallar el de varias*, para lo que se multiplica el valor de una por el número de ellas; 3.°, *para reducir unidades de especie superior á inferior*, lo cual se consigue multiplicando las unidades dadas, por las que una de éstas tenga de la inferior. La multiplicacion se usa ademas en otros muchos casos que pueden reducirse á los tres anteriores.

41. Muchas aplicaciones tiene la division, pero las más principales son: 1.ª, *ver las veces que un número contiene á otro*, para lo cual se divide el número por aquel que ha de estar con-

tenido; 2.ª, *dado el valor de varias unidades, hallar el de una*, lo que se consigue dividiendo el valor dado por el número de las unidades, y el cociente será el valor pedido; 3.ª, *reducir unidades de especie inferior á unidades de especie superior*, lo que se obtiene dividiendo las unidades dadas por las veces que una está contenida en la superior; 4.ª, *hallar la mitad, tercera, cuarta, etc. parte de un número*, para lo cual no hay más que dividirle por 2, 3, 4, etc.; 5.ª, *dividir un número en partes iguales*, lo que se consigue dividiendo el número dado por el que expresa las partes en que se ha de dividir.

Problemas.

1. *Una persona gasta anualmente* 480 *reales en botas*, 1357 *en pantalones*, 2254 *en levitas*, 450 *en chalecos*, 1874 *en ropa blanca*, 258 *en sombreros*, 8575 *en caballo*, 16450 *en casa, y* 20860 *en su manutencion. ¿Cuánto es su gasto anual?* — Solucion, 52558 reales.

2. *Una persona tiene varias haciendas: la primera le renta al año* 12500 *reales, la segunda* 38550, *la tercera* 14758, *la cuarta* 24689; *esta misma persona tiene de gasto anual* 12575 *reales por la casa en que vive*, 15782 *por gastos de coche*, 7189 *por la ropa que viste*, 4390 *por teatro, y* 24638 *por su manutencion. ¿Cuánto podrá ahorrar?* — S. 25923 reales.

3. *Si en una caja han entrado varias sumas, cuyo total es* 84575 *reales, y ha pagado tres letras, la primera* de 48570 *reales, la segunda de* 24657 *y la tercera de* 11348, *¿qué alteracion habrá sufrido?* — S. Ninguna.

4. *Se quiere saber el capital que tiene una persona á quien le deben tres sugetos: el primero* 2568 *reales, el segundo* 3497, *y el tercero* 8479; *pero que en cambio esta persona debe á un prestamista* 18475 *reales.* — S. No tiene capital, sino que debe 3931 reales.

5. *Cuál es la cantidad* 37 *veces mayor que* 478? — S. 17686.

6. *Si una vara de paño cuesta* 136 *reales, ¿cuánto costarán* 23 *varas?* — S. 3128 reales.

7. *¿Cuántos reales hacen* 37 *napoleones, teniendo* 19 *reales el napoleon?* — S. 703 reales.

8. *Si un hombre hace en un dia* 374 *varas de una obra, ¿cuántas harán* 24 *hombres?* — S. 8976 varas.

9. *Si un hombre hace en un dia* 374 *varas de una obra, ¿cuántas harán* 24 *hombres en* 36 *dias?* — S. 323136 varas.

10. *¿Cuántas veces está contenido el número* 324 *en* 8748? — S. 27 veces.

11. *Repartiendo* 768 *cuartos entre* 32 *pobres, ¿á cómo les toca?* — S. A 24 cuartos.

12. *¿Cuál es la quinta parte de* 32015? — S. 6403.

13. *¿Cuántos duros hacen* 1840 *reales?* — S. 92 duros.

14. 23 *varas de tela han costado* 736 *reales; ¿á cómo cuesta la vara?* — S. A 32 reales.

15. *Si* 24 *hombres hacen* 1008 *varas de una cierta obra en un dia, ¿cuántas varas hará un hombre solo?* — S. 42 varas.

16. *Se han necesitado* 120 *obreros para hacer una obra en un dia; ¿cuántos obreros se necesitarian para hacerla en* 15? — S. 8 obreros.

17. 8 *hombres han hecho una cierta obra en* 120 *dias; para hacerla en* 15 *dias, ¿cuántos hombres se necesitarán?* — S. 64 hombres.

18. 45 *varas de alambre han costado* 765 *reales; con* 612 *reales, ¿cuánto alambre se comprará?* — S. 36 varas.

19. *Un buque que contiene* 3600 *hombres tiene víveres para* 28 *dias; habiendo muerto* 800 *hombres, ¿para cuántos dias tendrán?* — S. Para 36.

20. 12 *varas de tela han costado* 204 *reales;* 37 *varas, ¿cuánto costarán?* — S. 629 reales.

21. *Si* 100 *reales nominales de un papel cualquiera del Estado equivalen á* 25 *efectivos, con un millon de reales efectivos cada mes, ¿cuánto papel podrá amortizarse en un año?* — S. 48 millones.

22. *Si* 6 *varas equivalen próximamente á* 5 *metros,* 354 *varas, ¿á cuántos metros equivaldrán?* — S. A 295 metros.

23. *Segun la misma relacion, ¿á cuántas varas equivalen* 375 *metros?* — S. A 450 varas.

24. *Se llama* kilográmetro *una unidad de fuerza capaz de elevar en un segundo á un metro de altura un kilógramo;* 75 *kilográmetros equivalen á otra unidad de fuerza que se llama* ca-

ballo de vapor. *El agua que cae de una altura se precipita con una fuerza capaz de elevar á la misma altura un peso equivalente al del agua que cae; por tanto, ¿á cuántos caballos de vapor equivaldrá la fuerza motriz de un manantial que se precipita de una altura de 24 varas, sabiendo que en las 24 horas pasa una cantidad cuyo peso es* 19.440000 *kilógramos?* — S. 60 caballos.

SEGUNDA PARTE.

PROPIEDADES GENERALES DE LOS NÚMEROS.

LECCION VI.

Modo de representar los números en general. — Idea de los límites y generalizacion de las definiciones. — Cálculo de los números representados por letras.

Modo de representar los números en general.

42. Cuando se trata de demostrar alguna propiedad de las que gozan los números, conviene representarlos de una manera general, y se hace por signos que, careciendo de los valores numéricos que cada uno de ellos pueda tener, expresen los números con las condiciones que se exigen en la cuestion. Las letras del alfabeto son las adoptadas para representar los números de una manera general; y como éstas son en número limitado y cada una de ellas no puede representar, en una cuestion particular, nada más que uno, podria llegar el caso que faltaran signos para representar los números; pero si se conviene en que poniendo á una letra uno, dos ó más acentos represente números distintos, queda vencida esta dificultad, puesto que con una sola podrian representarse todos los números imaginables.

Los acentos se colocan á la derecha y un poco más alto que la letra, sustituyéndoles por números romanos siempre que pasen de tres, y por una letra encerrada dentro de paréntesis (*) cuando se quiere expresar un número indeterminado de ellos. Así a, a', a'', a''', a^{IV}... $a^{(n)}$, se leen *a, a prima, a segunda, a tercera, a cuarta... a con* n *acentos.*

(*) Para que no se confunda con el exponente (véase *exponente*).

Tambien se acentúan las letras poniendo números llamados *subíndices* á la derecha y un poco más bajo, en esta forma: a a_1 a_2 a_3.... a_n, y se leen *a*, *a subuno*, *a subdos*, *a subtres*... *a sub*-n.

El uso de los acentos y de los subíndices es muy conveniente en más de una ocasión, como veremos en lo sucesivo, y se emplean, en general, siempre que tengamos que expresar varias cantidades que, siendo diferentes en valor numérico, tengan cierta relacion, ya sea por su naturaleza ó por otra causa cualquiera.

43. No se crea, sin embargo, que una demostracion será más ó ménos general, segun que los números que entren en la cuestion estén ó no representados por letras. Si la demostracion es buena, tan general es de una manera como de otra, porque el razonamiento que se haga sobre un número particular, se aplicará igualmente á otro que se halle en las mismas condiciones. Ahora bien, si para demostrar una propiedad de las que goza un número que satisface á ciertas condiciones se elige uno de estos números, generalmente se cree por aquellos que no comprenden bien en qué consiste la demostracion, que ésta sólo es aplicable al número que han elegido, al paso que representándole por una letra en la cual se hace abstraccion del valor numérico, lo que de esta letra se dice queda dicho de todos los números particulares que estén representados por ella. Esto, sin embargo, no es exacto: la demostracion, tan general es en uno como en otro caso; mas para comprenderlo así es necesario prescindir del valor particular del número, y no sólo ver en él aquel que se considera, sino cualquiera otro que se halle en las mismas condiciones; y como es mucho más fácil comprender que una letra pueda representar cualquier número que cumpla con ciertas condiciones, que un número particular de éstos, de aquí la ventaja de adoptar las letras en vez de los números.

Otra de las ventajas de preferir las letras á los números en las demostraciones de principios ó verdades, es, el que no siempre puede hallarse ni ser calculado con prontitud un número que cumpla con tal ó cual condicion; miéntras que una letra puede representarle con la condicion que se quiera.

44. Los signos que se emplean para indicar las operaciones, son $+$, $-$, $\times$ ó (.), (:), que como sabemos, expresan res-

pectivamente las cuatro operaciones de sumar, restar, multiplicar y dividir.

Cuando los factores de una multiplicacion están representados por letras ó por un número y una letra, se suprime el signo y queda indicada poniendo uno al lado del otro, principiando siempre por el número, el cual toma el nombre de *coeficiente;* así, $a \times b = ab$, $5 \times a = 5a$; por lo tanto diremos que,

Coeficiente es un número que se escribe á la izquierda de una cantidad representada por letras, y que con sus unidades expresa las veces que dicha cantidad está repetida como sumando.

Exponente es el número que se escribe á la derecha y un poco más alto que la cantidad, y con sus unidades indica las veces que está repetida por factor. Así, $a^3 = a \times a \times a = aaa$. El número 3 es el exponente.

Potencia de una cantidad es el resultado de repetir dicha cantidad como factor un cierto número de veces; llamándose *segunda*, *tercera*, *cuarta*, etc., segun que entre por factor *dos*, *tres*, *cuatro*, etc. veces.

Raiz de una cantidad es otra que repetida un cierto número de veces como factor nos da la primera; llamándose *cuadrada* ó *segunda*, *cúbica* ó *tercera*, *cuarta*, etc., y en general *enésima*, segun que se haya de repetir por factor *dos*, *tres*, *cuatro* ó *n* veces para que produzca la cantidad de la cual es raiz.

El signo que indica la raiz de una cantidad llamado *radical* es $\sqrt{}$; en la abertura del signo radical $\sqrt{}$ se pone el número llamado índice que expresa el grado de la raiz, y debajo de la raya se pone la cantidad de la cual se ha de extraer dicha raiz.

Los signos de relacion son $=$, $<>$, $>$, $<$, $\neq$, $\ngtr$, $\nless$, que se leen: *igual á*, *equivalente á*, *mayor que*, *menor que*, *no es igual á*, *no es mayor que*, *no es menor que;* y el resultado de estas relaciones se llama *igualdad*, *equivalencia* ó *desigualdad*, segun que se ponga uno de los signos $=$, $<>$, ó $> <$.

Cuando una cantidad se deba sumar ó restar indistintamente de otra, se pone el doble signo $\pm$ ó $\mp$ que se denomina de ambigüedad, y se lee *más ménos* ó *ménos más*.

Idea de los límites y generalizacion de las definiciones.

45. Antes de pasar al cálculo de los números representados por letras, debemos observar, que careciendo éstas de valor absoluto, pueden representar un número cualquiera; y como éste puede ser de cuatro modos (4), es necesario ver si las definiciones de las operaciones fundamentales dadas hasta aquí, son aplicables á cualquier número.

46. Siendo el número, como venimos considerándolo, el resultado de la comparacion de una cantidad con su unidad, vemos que representa el valor de dicha cantidad, por cuya razon se suele tomar por la cantidad que representa; en cuyo caso el número se llama *concreto*.

Ahora bien, el cálculo aplicado á los números, como los representantes, digámoslo así, de las cantidades, no ofrece dificultad en las operaciones de sumar y restar; porque siendo de una misma especie, como por su naturaleza lo exige la cuestion, se comprende fácilmente, que el resultado indicará una cantidad cuyo valor numérico será igual á la suma ó diferencia de los valores numéricos de las cantidades que se sumaron ó restaron; pero en la multiplicacion y division carecen en general de sentido las definiciones dadas para los números abstractos. En efecto, multiplicar, por ejemplo, 7 varas por 5 reales, dicho así simplemente no quiere decir nada, por lo cual estos casos no se deben considerar; pero como se presentan en la resolucion de los problemas, tanto en matemáticas como en otra ciencia cualquiera, lo que se hace es prescindir de la naturaleza de la cantidad y hacer las operaciones necesarias con las relaciones que hay entre estas cantidades y sus unidades, es decir, con los números abstractos, y considerar el resultado como el valor numérico de la cantidad que debe obtenerse segun las condiciones del problema. Así se comprende cómo en una cuestion pueden entrar cantidades de distinta especie y pueden combinarse entre sí por medio de las operaciones del cálculo aritmético.

Visto ya que en el cálculo de las cantidades se debe prescindir de su naturaleza y verificarle con los números abstractos que indican las relaciones en que están dichas cantidades con sus unidades, siendo el resultado de la naturaleza que marque la cuestion, tenemos todavía que salvar otra dificultad, y es, que no siempre podremos hallar valores numéricos exactos de las cantidades que entran en una cuestion; y entónces ¿cómo obtener los resultados de las operaciones que deben hacerse con dichas cantidades? Las cantidades que no se pueden medir con una unidad ni parte alícuota de ella, sabemos (4–4.°) que dan orígen á los *números inconmensurables:* estas cantidades, llamadas tambien *inconmensurables*, sólo pueden apreciarse aproximadamente; para lo cual se divide la unidad en un cierto número de partes iguales, y colocando una de ellas sobre la cantidad que se quiere medir todas las veces que se pueda, obtendremos un resto menor que una de estas partes, y un número fraccionario que expresará el valor de una cantidad que se diferencia de la verdadera en el resto obtenido; y como éste disminuye á medida que es mayor el número de partes en que se dividió la unidad, se sigue que el error cometido tomando por el valor de la cantidad inconmensurable, el de la que resulta despreciando el último resto, puede ser tan pequeño como queramos, y por lo tanto menor que cualquier cantidad dada por pequeña que sea; de modo, que el valor numérico de la cantidad en cuestion, ó sea el número inconmensurable, se podrá considerar como el *límite de la serie de los números fraccionarios que expresan las relaciones aproximadas de la cantidad con su unidad;* entendiendo por *límite* de una cantidad que varía, *otra cantidad fija á la cual se va aproximando la primera cuanto se quiera, pero sin ser jamas rigorosamente igual á ella.* De esta definicion se deduce, que pudiendo ser la diferencia que hay entre la cantidad variable y la fija tan pequeña como queramos, se podrá decir que son iguales en el *límite*.

Esto supuesto, cuando esta clase de cantidades inconmensurables entren en un cálculo, consideraremos los valores numéricos que sólo las representan aproximadamente, y obtendremos así resultados aproximados, que lo serán tanto más, cuanto mayor sea la aproximacion de los números que entran en la cuestion.

47. Lo único que ahora nos falta probar es, que así como los números inconmensurables se consideran como límites de núme-

ros fraccionarios que se les aproximan cada vez más, los resultados del cálculo aritmético, hecho con estos números inconmensurables, *son* tambien *los límites de los resultados de las operaciones que se efectúan con los números aproximados, á medida que éstos se aproximan á sus límites respectivos;* para lo cual demostraremos los dos principios siguientes:

Primero. *Una cantidad variable* A *no puede tender á la vez hácia dos límites diferentes* L *y* L′, porque á medida que vaya aproximándose la cantidad A al límite menor L, la diferencia entre A y L′ no podrá ser tan pequeña como se quisiera, puesto que se iria aproximando á valer L′ — L; luego segun la definicion de límite, L′ no puede serlo.

Segundo. *Si dos cantidades* A *y* B *son variables y se verifica que en todos sus estados de magnitud son iguales, sus límites tambien lo serán.* En efecto, si fuesen los límites desiguales tales como L y L′, tendriamos, que como la primera se aproxima indefinidamente á su límite L, y la segunda al suyo L′, dejarian de ser iguales á medida que se fuesen aproximando á dichos límites, lo cual es contra la hipótesis; luego los límites L y L′ tienen que ser iguales.

Ahora bien, una operacion cualquiera hecha con los números aproximados, da un resultado que varía á medida que lo hacen los números que entran en ella, y la operacion indicada es constantemente igual al resultado de la misma, cualquiera que sea el grado de aproximacion; por lo tanto, segun lo demostrado anteriormente, en el límite tambien lo serán; luego *el resultado de las operaciones hechas con números inconmensurables, es el límite de los resultados que se obtienen poniendo en vez de los inconmensurables, los números que los representan.*

Quedando, pues, reducido el cálculo de las cantidades al de los números que la representan en abstracto, y éste al de los números enteros ó fraccionarios, y siendo las definiciones aplicables á éstos, lo son tambien á todos los números considerados siempre como abstractos.

Cálculo de los números representados por letras.

48. Para sumar números representados por letras, se escriben las unas á continuacion de las otras con el signo $+$ interpuesto. Así, la suma de los números a, b, c y d, será:

$$a + b + c + d.$$

Para restar un número de otro, se escriben con el signo $-$ intermedio. Así, $a - b$ expresa la diferencia que hay entre a y b.

La multiplicacion queda efectuada colocando los factores unos á continuacion de los otros sin interposicion de signos, haciendo uso del exponente en el caso de haber dos ó más factores iguales. Así, $a \times b = ab$, $a \times a \times b = a^2b$.

El cociente de dos números queda expresado poniendo uno debajo del otro con una raya intermedia. Así, $a : b = \frac{a}{b}$.

En efecto, miéntras que á estas letras no se les den valores particulares, no podremos sino dejar indicadas por los signos correspondientes las operaciones que con ellos se hayan de efectuar.

49. *Cuando los términos de una operacion sean sumas ó restas indicadas, es necesario encerrarlos dentro de paréntesis, para reconocerles como tales términos.* Así, teniendo que indicar el producto, por ejemplo, de $a + b$ por $c - d$, se escribirá

$$(a + b)\,(c - d);$$

porque si no hiciésemos uso del paréntesis, quedaria indicada la operacion de este modo: $a + b \times c - d = a + bc - d$, lo cual dice que se ha de añadir á a el producto bc, y de la suma se ha de restar el número d; operacion muy distinta de la que se queria expresar.

Si queremos sumar los números representados por $a + b + c$, $a + b + e$, y $c + b + d$, se indicará la operacion del modo siguiente:

$$(a + b + c) + (a + b + e) + (c + b + d);$$

y la suma quedará efectuada poniendo los sumandos unos á continuacion de otros con sus propios signos, y haciendo uso del coeficiente en el caso de haber números iguales. La suma anterior dará:

$$(a+b+c)+(a+b+e)+(c+b+d)=$$
$$a+b+c+a+b+e+c+b+d=2a+3b+2c+d+e.$$

En efecto, al sumar dos números representados por dos sumas, es evidente que será necesario agregar á la primera la suma de los números de la segunda, á ésta la de los números de la tercera, y así sucesivamente; lo cual podrá hacerse agregando desde luégo el primer número, despues el segundo, en seguida el tercero, y así sucesivamente.

Si tuviéramos que sumar dos diferencias, al valor de la primera agregariamos la diferencia de los números que expresa la segunda, lo cual se consigue agregando á la primera diferencia el minuendo de la segunda, y restando del resultado el sustraendo de la misma.

50. Luego *para sumar varias sumas ó diferencias indicadas se escriben los números que forman los sumandos, unos á continuacion de otros con los signos que tengan, y despues se hace la reduccion por medio de los coeficientes.*

Ahora bien, cualquier número con el signo $+$ tiende á aumentar el resultado en tantas unidades cuantas vale, y el que lleva el signo — tiende á disminuirle; luego *la suma de varios números que llevan el signo $+$ y el signo — será igual á la suma de los primeros, ménos la suma de los segundos;* por lo que á esta clase de sumas se les llama algebráicas, pues aunque son sumas, se efectúan por medio de una resta: lo mismo se dice de una diferencia.

51. *Para restar de una suma ó diferencia indicada, otra suma ó diferencia, se escribe el minuendo y á continuacion el sustraendo con signos cambiados.*

Así, $(a+b-c)-(e+d-f)=a+b-c-e-d+f.$

En efecto, del minuendo tal cual sea, hay que restar la suma ó diferencia de los números que constituyen el sustraendo, segun que éste sea una suma ó una diferencia: pero es evidente, que restando sucesivamente cada uno de los sumandos que constituyen el sustraendo, habremos restado la suma de todos éstos;

y como cada una de estas restas parciales se obtiene poniendo el número que se ha de restar á continuacion de aquel que sirve de minuendo con el signo —, resulta lo que se queria demostrar.

Si el sustraendo fuese una diferencia, el resultado se obtendria restando del minuendo principal el minuendo de la diferencia–sustraendo, y agregando al resultado el sustraendo de dicha diferencia.

En efecto, al restar del minuendo principal el de la diferencia–sustraendo, hemos quitado tantas unidades más como tiene el sustraendo de la misma; por lo que agregando este sustraendo hallaremos el resto pedido.

Apliquemos este razonamiento á un ejemplo, y sea restar primero, del minuendo M el sustraendo $a+b+c$. Se indicará la operacion así:

$$M-(a+b+c)=M-a-b-c.$$

En efecto, de M, hemos de restar la suma de los números a, b y c; luego restando primero a, lo cual dará $M-a$; despues b, lo que da $M-a-b$, y por último c, obtenemos el resultado pedido $M-a-b-c$.

Restemos, en segundo lugar, del minuendo M, el sustraendo $a-b$, y se tendrá:

$$M-(a-b)=M-a+b.$$

En efecto, se nos pide restar del minuendo M la diferencia $a-b$, es decir, a ménos b unidades; restando, pues, el número a, lo que da $M-a$, hemos restado b unidades más de las que se pedian, porque no eran a, sino $a-b$ las que se habian de restar; luego añadiendo al resultado $M-a$, las b unidades que hemos quitado de más, tendremos el resultado pedido.

Observacion. Siempre que hallemos una cantidad dentro de un paréntesis y fuera el signo —, debemos considerarla como un sustraendo de una resta cuyo minuendo se ha reducido á cero; de modo que podremos quitar el paréntesis, cambiando los signos de la cantidad que hay dentro: así,

$$-(a+b-c)=-a-b+c;$$

y recíprocamente

$$-a+b-c=-(a-b+c).$$

52. *Para multiplicar una suma ó diferencia indicada por un número, se multiplica cada uno de los números que constituyen el multiplicando por el multiplicador, y se ponen los productos parciales los unos á continuacion de los otros con los mismos signos que tienen en el multiplicando.*

En efecto, el producto es del multiplicando lo que el multiplicador es de la unidad; luego si demostramos que tomando números que sean respecto de cada sumando, lo que el multiplicador es de la unidad, y que la suma algebráica de estos números indicada por el multiplicando nos da el producto, el principio quedará demostrado.

Sea la suma $a+b-c$, y d el número por que se ha de multiplicar, y vamos á demostrar que

$$(a+b-c)\,d = ad + bd - cd.$$

Consideraremos tres casos: 1.°, *que* d *sea un número entero;* 2.°, *fraccionario;* y 3.°, *inconmensurable.*

Primer caso. Siendo d un número entero, el producto será, segun la definicion, d veces el multiplicando; luego

$$(a+b-c)\,d = a+b-c+a+b-c+a+b-c+\ldots$$
$$= ad+bd-cd.$$

Segundo caso. Si d es fraccionario, expresará un número m de partes de la unidad dividida en n, que se indica así, $\frac{m}{n}$. De modo que el producto será del multiplicando lo que $\frac{m}{n}$ es de la unidad, es decir, m veces la *enésima* parte; luego hallando la *enésima* parte del multiplicando y repitiéndola m veces, tendremos el producto.

Pero la *enésima* parte del multiplicando es $\frac{a}{n}+\frac{b}{n}-\frac{c}{n}$, porque

$$\left(\frac{a}{n}+\frac{b}{n}-\frac{c}{n}\right)n = \frac{a}{n}\times n+\frac{b}{n}\times n-\frac{c}{n}\times n = a+b-c;$$

luego el producto será

$$\left(\frac{a}{n}+\frac{b}{n}-\frac{c}{n}\right)m = \frac{a}{n}\times m+\frac{b}{n}\times m-\frac{c}{n}\times m.$$

Pero se tiene que

$$\frac{a}{n}\times m+\frac{b}{n}\times m-\frac{c}{n}\times m=a\times\frac{m}{n}+b\times\frac{m}{n}-c\times\frac{m}{n};$$

porque repetir la *enésima* parte de a, por ejemplo, m veces, es lo mismo que repetir a, que es n veces mayor, un número de veces que sea ese mismo número n de veces menor; luego tambien en el caso de ser fraccionario se verifica que

$$(a+b-c)\,d=ad+bd-cd.$$

Tercer caso. Siendo d un número inconmensurable, el producto de $a+b-c$ por d será (47) el *límite de los productos que se obtienen reemplazando por* d *números fraccionarios que se le vayan aproximando cada vez más*, de modo que representando estos números por d', d'', d'''... se tendrá, segun los casos anteriores,

$$(a+b-c)\,d'=ad'+bd'-cd'.$$
$$(a+b-c)\,d''=ad''+bd''-cd''.$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Los productos obtenidos se van aproximando al producto verdadero, á medida que d', d'', d'''... van aproximándose á su límite; luego se tendrá que siendo estas dos expresiones constantemente iguales, en el límite tambien lo serán (47); por consiguiente tendremos

$$(a+b-c)\,d=ad+bd-cd.$$

Luego el principio queda demostrado en todos los casos.

53. *Para multiplicar una suma ó diferencia indicada por una suma, se multiplica todo el multiplicando por cada uno de los sumandos del multiplicador, y se suman los productos parciales.*

En efecto, hallando números que sean respecto del multiplicando lo que cada uno de los sumandos del multiplicador es de la unidad, y sumando estos números, obtendremos el número, que será de todo el multiplicando lo que el multiplicador es de la unidad (52).

Sean los factores que hemos de multiplicar $(a+b-c)$ y $(m+n)$.

El número que se busca ha de ser de $(a+b-c)$ lo que $m+n$ es de la unidad: hallando primero un número que sea del multiplicando lo que m es de la unidad, y despues otro que sea del mismo multiplicando lo que n es tambien de la unidad, y sumando estos números, tendremos otro que será de $(a+b-c)$, lo que $m+n$ es de la unidad, y por consiguiente el producto; pero el primero de estos números es (52)

$$(a+b-c)\,m = am+bm-cm,$$

el segundo será

$$(a+b-c)\,n = an+bn-cn;$$

luego el producto pedido será la suma de estos dos productos parciales, y por tanto se tendrá

$$(a+b-c)(m+n) = am+bm-cm+an+bn-cn.$$

54. *Para multiplicar una suma ó diferencia por una diferencia, se multiplica todo el multiplicando por el minuendo y sustraendo del multiplicador, y se restan los productos parciales*, cuya resta se obtendrá con sólo poner á la derecha del primer producto los términos del segundo con los signos cambiados (51).

En efecto, hallando números que sean del multiplicando lo que el minuendo y sustraendo del multiplicador son respecto de la unidad, y restando estos números, es evidente que habremos hallado el número que será del multiplicando lo que el multiplicador es de la unidad, y por tanto el producto pedido.

Consideremos el producto de $(a+b-c)$ por $(m-n)$: segun la definicion (22) hemos de hallar un número que sea respecto de $a+b-c$, lo que $m-n$ es respecto de la unidad: hallando primero un número que sea de $a+b-c$, lo que m es de la unidad, y despues otro que sea del mismo multiplicando lo que n es tambien de la unidad, y restando estos números, tendremos otro que será de $a+b-c$, lo que $m-n$ es de la unidad, y por consiguiente el producto pedido; pero el primero de estos números es (52)

$$(a+b-c)\,m = am+bm-cm,$$

el segundo será

$$(a+b-c)\,n = an+bn-cn;$$

luego la diferencia de estos dos números expresará el producto que buscamos, y por tanto se tendrá

$$(a+b-c)(m-n)=am+bm-cm-an-bn+cn.$$

Donde vemos que el producto queda efectuado poniendo á la derecha del que resulta de multiplicar el multiplicando por el minuendo del multiplicador, el producto con los signos cambiados del mismo multiplicando por el sustraendo.

OBSERVACIONES. 1.ª De lo dicho anteriormente se deduce *que el producto de dos sumas algebráicas* (50) *se obtiene, multiplicando la primera por cada número de la segunda, poniendo estos productos unos á continuacion de otros con sus mismos signos ó signos cambiados, segun que los números del multiplicador lleven signo* $+$ *ó* $-$, *y efectuando, por último, la suma algebráica de todos estos productos.*

2.ª De la igualdad $(a+b-c)\,m=am+bm-cm$, se deduce que $am+bm-cm=(a+b-c)\,m=m\,(a+b-c)$; y como $(a+b-c)$ se obtiene dividiendo cada término de $am+bm-cm$ por el factor m, resulta que *se podrá sacar una cantidad factor comun de una suma algebráica, poniendo dicha cantidad fuera de un paréntesis, y dentro lo que resulta de dividir todos los términos de la suma por el factor que se sacó.* Así,

$$am+bm-cm+d=m\left(a+b-c+\frac{d}{m}\right).$$

En efecto,

$$m\left(a+b-c+\frac{d}{m}\right)=\left(a+b-c+\frac{d}{m}\right)m=$$

$$am+bm-cm+\frac{d}{m}\,m=am+bm-cm+d.$$

55. *Para dividir una suma algebráica por un número, se divide cada uno de los sumandos; y la suma algebráica de los cocientes será el cociente de la suma.*

En efecto, el cociente ha de ser tal que multiplicado por el divisor ha de dar el dividendo; pero el producto del cociente por el divisor se obtiene multiplicando cada término de aquel por dicho divisor; y resulta, que como los términos del cociente son los cocientes que han provenido de dividir los sumandos del dividendo por el divisor, al multiplicarlos por éste, volverán á dar los términos del dividendo; luego aquel será el cociente.

Así, tendremos

$$\frac{a+b-c}{m}=\frac{a}{m}+\frac{b}{m}-\frac{c}{m},$$

lo cual no deja duda, puesto que el producto de $\frac{a}{m}+\frac{b}{m}-\frac{c}{m}$ por el divisor m, es el dividendo $a+b-c$, como á continuacion se ve:

$$\left(\frac{a}{m}+\frac{b}{m}-\frac{c}{m}\right)m=\frac{a}{m}m+\frac{b}{m}m-\frac{c}{m}m=a+b-c.$$

Si el divisor fuese otra suma algebráica, se obtendria el cociente del mismo modo, dividiendo siempre cada término del dividendo por todo el divisor. La demostracion es la misma. Así,

$$\frac{a+b-c}{f+g-h}=\frac{a}{f+g-h}+\frac{b}{f+g-h}-\frac{c}{f+g-h}.$$

Observacion general. Siempre que en los resultados de estas operaciones haya sumandos, sustraendos, factores ó divisores iguales, se simplificarán haciendo uso de los coeficientes y exponentes.

Otra. Las demostraciones que hemos dado en el cálculo de los números representados por letras, no sólo son aplicables al caso de ser los números *enteros*, sino tambien cuando sean *fraccionarios* é *inconmensurables*.

LECCION VII.

Alteraciones que experimentan los resultados de la multiplicacion y division, segun las que sufren los datos. — Abreviaciones que pueden hacerse en ámbas operaciones.

Alteraciones que experimentan los resultados de la multiplicacion y division, segun las que sufren los datos.

El producto indicado de varios factores expresa que se ha de multiplicar el primero por el segundo, el producto de éstos por el tercero, el que resulta por el cuarto, y así sucesivamente.

56. *El producto de varios factores no varía, cualquiera que sea el órden en que se multipliquen* (*).

Sea el producto $a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot f$, en el cual demostraremos primeramente *que se puede cambiar uno de los factores con el que tiene al lado, sin que dicho producto se altere*. Supongamos que los factores c y d son los que van á cambiar, dando órigen á los productos $a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot f$ y $a \cdot b \cdot d \cdot c \cdot f$, que vamos á demostrar son iguales.

En efecto, la parte de producto hasta el primer factor que se cambia, nos da

$$a \cdot b \cdot c = a \cdot b + a \cdot b + a \cdot b + \ldots \text{ repetido } c \text{ veces.}$$

Estas expresiones iguales, darán resultados tambien iguales si las multiplicamos por el mismo número d, que es el factor siguiente, lo que da

$$a \cdot b \cdot c \cdot d = (a \cdot b + a \cdot b + a \cdot b + \ldots \text{ repetido } c \text{ veces})\, d = a \cdot b \cdot d + a \cdot b \cdot d + a \cdot b \cdot d + \ldots \text{ repetido } c \text{ veces.}$$

(*) Este principio sólo se puede demostrar ahora para el caso de ser números enteros los factores; pero siendo verdadero, ya sean quebrados ó inconmensurables, cómo lo demostraremos al tratar de estos números, podremos admitirle desde luégo como general á todos los casos, para deducir tambien de una manera general las consecuencias que veremos en seguida, y no tener que deducirlas, ahora para los números enteros, y despues para los quebrados y números inconmensurables.

Y como $a \,.\, b \,.\, d$ repetido c veces por sumando, es igual á

$$a \,.\, b \,.\, d \,.\, c,$$

se sigue que

$$a \,.\, b \,.\, c \,.\, d = a \,.\, b \,.\, d \,.\, c;$$

de modo, que multiplicando estas dos expresiones iguales por los factores que restan, que en este caso es sólo f, se tendrá

$$a \,.\, b \,.\, c \,.\, d \,.\, f = a \,.\, b \,.\, d \,.\, c \,.\, f,$$

que es lo que debiamos demostrar.

Ahora bien, pudiendo permutar cada factor con el que tiene al lado sin que por ello varie el producto, podremos hacer todas las permutaciones que queramos, permaneciendo siempre el mismo producto, con lo cual queda el principio demostrado.

57. *Si á uno de los factores de un producto se le aumenta ó disminuye una cierta cantidad, el producto vendrá aumentado ó disminuido en el del otro factor por la cantidad que se aumentó ó disminuyó.*

Sea el producto $ab = P.$

Aumentando ó disminuyendo á uno de los factores, a por ejemplo, una cierta cantidad m, se tendrá

$$(a \pm m)\, b = ab \pm mb = P \pm bm.$$

Donde vemos que el producto P viene aumentado ó disminuido en el producto de la cantidad m por el otro factor b, que es lo que debiamos demostrar.

58. *Si se multiplica uno de los factores de un producto por un número, el producto viene multiplicado por el mismo número.*

Sea el producto $ab = P.$

Multiplicando uno cualquiera de sus factores, b por ejemplo, por el número m, se tendrá

$$abm = Pm;$$

si, por el contrario, fuese a, se tendria tambien (56)

$$amb = abm = Pm.$$

Luego el principio queda demostrado.

59. *Si cada factor de un producto se multiplica por un número, el producto vendrá multiplicado por el de los números por que se multiplicaron los factores.*

Sea el producto $ab = P$.

Multiplicando el factor a por m y el factor b por n, resulta (56)

$$ambn = abmn = Pmn;$$

de modo que siendo $mn = P'$, se tendrá $ambn = PP'$.

60. La recíproca no es verdadera: es decir, que si el producto viene multiplicado por un número, no se puede asegurar la alteracion que habrán sufrido los factores; porque puede provenir de haber multiplicado uno de ellos por el número que se multiplicó el producto, ó bien puede haberse multiplicado cada factor por números cuyo producto sea igual al número por que se multiplicó el producto dado.

En efecto, sea el producto $5 \times 4 = 20$.

Si el producto 20 viene multiplicado por el número 6, puede ser, ó porque uno de los factores del 20 se ha multiplicado por 6, ó porque uno se ha multiplicado por 3 y el otro por 2, cuyos dos números 2 y 3 dan el producto 6, número por el cual aparecia multiplicado el producto 20.

Sin embargo, sabiendo la alteracion del producto y la que ha sufrido uno de los factores, se puede deducir la que ha experimentado el otro factor. Así, si se sabe que un producto viene multiplicado por un número entero cualquiera m, y uno de los factores no ha sufrido alteracion, el otro factor vendrá multiplicado por el mismo número m. Si viniendo multiplicado el producto por m, uno de los factores viene multiplicado tambien por el mismo número, el otro factor no habrá sufrido alteracion. Y por último, si el producto está multiplicado por m y uno de los factores aparece multiplicado por un factor n del número m, el otro factor vendrá multiplicado por el otro número, que multiplicado por n nos da m.

61. De lo dicho anteriormente se deduce: 1.º que para multiplicar un producto por un número, basta multiplicar por dicho

número uno de sus factores; 2.° para multiplicar un producto por otro, no hay más que multiplicar sucesivamente el primero por cada uno de los factores del segundo.

62. *Si uno de los factores de un producto se divide por un número, el producto viene dividido por el mismo número.*

Sea el producto $ab = P$.

Dividiendo el factor b por un número, se tendrá representando por b' el cociente de b por n, y por P' el nuevo producto:

$$ab' = P'.$$

Ahora bien, si se vuelve á multiplicar el factor b' por n, obtendremos (58)

$$ab'n = P'n,$$

ó lo que es lo mismo

$$ab = P'n;$$

pero $ab = P$, luego $P'n = P$, de donde $P' = \frac{P}{n}$; y por consiguiente dividiendo un factor b por n, el producto P' que resulta es el cociente de dividir el producto primitivo P por el número n; luego dividiendo un factor por un número, el producto viene dividido por el mismo número.

63. *Si se divide cada uno de los factores de un producto por un número, el producto vendrá dividido por el de los números por que se dividieron los factores.*

Sea el producto $ab = P$.

Dividiendo cada uno de los factares por los números respectivos m y n, tendremos, llamando a' y b' á los cocientes y P' al nuevo producto,

$$a'b' = P'.$$

Si ahora volvemos á multiplicar los factores a' y b' por los números respectivos m y n, se tendrá (59)

$$a'mb'n = ab = P'mn;$$

luego $P'mn = P$:

y por tanto, P′ es el cociente de dividir P por el producto de los dos números m y n por los cuales se dividieron los factores del producto P, que es lo que debiamos demostrar.

64. Tampoco podemos saber las alteraciones de los factores de un producto con sólo saber que éste se ha dividido por un número; porque segun lo dicho en los dos números anteriores, puede suceder que un producto se haya dividido por un número m, á causa de haber dividido á uno de ellos por m, ó bien de haber dividido uno de los factores por un número n, y el otro por un número tal que multiplicado por n nos dé el número m.

Sin embargo, cuando se conoce la alteracion que experimentan el producto y uno de los factores, es muy fácil deducir la que corresponde al otro factor.

En efecto, supongamos que un producto se divide por un número m y que uno de los factores no ha sufrido alteracion; el otro factor vendrá dividido evidentemente por dicho número m. Si apareciendo el producto dividido por m, uno de los faetores viniése dividido por el mismo número, es claro que el otro factor no habrá sufrído alteracion; y por último, si habiendo dividido un producto por el número m y uno de los factores viniese dividido por un número n, el otro vendrá dividido por el número que multiplicado por n produce el número m por el cual se dividió el producto.

65. De lo dicho resulta, que para dividir un producto por un número, basta dividir por dicho número uno de sus factores; ó dividir los factores del producto, por los números que multiplicados entre sí dan aquel por el cual se quiere dividir el producto propuesto; ó lo que es lo mismo, para dividir un producto por otro, basta dividir los factores del primero por los del segundo.

66. *Para dividir un número por un producto, se divide primero por uno de los factores, el cociente que resulta se vuelve á dividir por otro factor, el nuevo cociente se divide por un tercer factor, y así sucesivamente.*

En efecto, sea el número N el que hemos de dividir por el producto de los números a, b, c.

Si dividimos N por a y llamamos al cociente N′, tendremos

$$N = aN' \qquad [1].$$

Dividiendo N′ por b y llamando N″ al cociente, se tendrá

$$N' = bN'' \qquad [2].$$

Y por último, dividiendo N″ por c y llamando al cociente N‴, será

$$N'' = cN''' \qquad [3].$$

Continuando del mismo modo si hubiese más factores, llegaremos á una última igualdad, la cual es en el caso presente, $N'' = cN'''$, de modo que poniendo en la anterior [2] en vez de N″ su valor, tendremos $N' = cbN'''$, y sustituyendo en [1] el valor de N′, se tendrá

$$N = cbaN'''.$$

Luego N‴, último cociente hallado, es precisamente el cociente de dividir N por el producto abc.

67. De todo lo dicho anteriormente resulta: 1.°, *que un producto queda multiplicado ó partido por un número, multiplicando ó partiendo uno de sus factores por dicho número;* 2.°, *que si el producto viene multiplicado ó partido por un número y uno de los factores no ha sufrido alteracion, el otro debe venir multiplicado ó partido por el mismo número;* 3.°, *que si un producto y uno de los factores se ha multiplicado ó partido por un número, el otro factor no sufre alteracion;* 4.°, *si un factor se multiplica ó parte por un número y el otro se multiplica tambien ó parte por otro número, el producto vendrá multiplicado ó partido por el producto de los dos números;* 5.°, *si uno de los factores se multiplica ó parte por un número y el otro se divide ó multiplica por el mismo número, el producto no sufre alteraracion.*

68. *Si al dividendo de una division se le aumenta ó disminuye un número, el cociente viene aumentado ó disminuido en el que resulta de dividir por el divisor la suma ó diferencia del número que se aumentó ó disminuyó y del resto de la primera division si lo habia; si no lo hubiese, vendrá entónces aumentado ó disminuido en el cociente de dividir dicho número por el divisor.*

En efecto, sea A un dividendo, B un divisor, Q el cociente, y R el resto, que podrá ser cero: se tiene

$$A = BQ + R.$$

Aumentando ó disminuyendo á estas dos expresiones iguales la misma cantidad m, se tendrá

$$A \pm m = BQ \pm m + R.$$

Dividiendo por B, tendremos

$$\frac{A \pm m}{B} = Q \pm \frac{m \pm R}{B}.$$

Ponemos el signo $\pm$ entre m y R, porque cuando se toma m con el signo + se ha de dividir la suma de m y R por B, y el cociente añadirlo á Q.

Pero cnando m lleva el signo —, entónces lo que hay que dividir es $-m+R$, y como $-m+R = -(m-R)$ (51), resulta que cuando m se toma con el signo —, ó sea cuando ha de disminuirse, hay que restar del cociente Q el que resulta de dividir la diferencia $m-R$ por el divisor B.

Observacion. Si m es tal que la suma ó la diferencia entre m y R es menor que el divisor B, el cociente no sufrirá alteracion; sólo la resta R vendrá aumentada ó disminuida en dicho número m.

Si se aumenta ó disminuye el divisor en una cierta cantidad, es evidente que el cociente, para que haya compensacion, vendrá disminuido ó aumentado en otra que seria fácil determinar; pero no se hace, por ser de poca importancia.

69. *Si se multiplica ó parte el dividendo de una division exacta por un número, el cociente vendrá multiplicado ó partido por el mismo número.*

En efecto, el dividendo es un producto que viene multiplicado ó dividido por un número, permaneciendo sin alteracion el divisor, que es uno de los factores; luego el otro factor, que es el cociente, vendrá (67-2.°) multiplicado ó partido por el mismo número.

70. Si la division no es exacta, *al multiplicar ó partir el*

dividendo por un número, vendrán multiplicados ó partidos por el mismo número el cociente y resto.

En efecto, siendo A el dividendo, B el divisor, Q el cociente, y R el resto, se tiene

$$A = BQ + R.$$

Y multiplicando ámbas expresiones por M, será (52)

$$AM = BQM + RM \quad [1];$$

luego el cociente Q y el resto R vienen multiplicados por el mismo número M.

Observacion. Si RM es mayor que B, podrá dividirse por dicho número; de modo que llamando Q' al cociente y R' al resto, tendremos

$$RM = BQ' + R'.$$

De modo que poniendo en la igualdad [1] en vez de RM su igual $BQ' + R'$, se tendrá

$$AM = BQM + BQ' + R';$$

y sacando B factor comun

$$AM = B(QM + Q') + R';$$

luego cuando el producto del resto R por el número M, es mayor que B, el cociente Q, *no sólo queda multiplicado por el número* M *por el cual se multiplicó el dividendo, sino que viene ademas aumentado en el cociente que resulta de dividir el producto del número* M *y resto, por el divisor* B.

71. Si en vez de multiplicar la igualdad [1] por el número M, la hubiésemos dividido, obtendriamos (67-1.°)

$$\frac{A}{M} = B\frac{Q}{M} + \frac{R}{M};$$

donde vemos que dividiendo A por M, *el cociente* Q *y resto* R *vienen divididos por el mismo número.*

72. *Si se multiplica ó parte el divisor de una division exacta por un número, el cociente viene dividido ó multiplicado por el mismo número.*

En efecto, el dividendo es un producto que no ha sufrido alteracion; el divisor, que es uno de los factores, se ha multiplicado ó partido por un número; luego el cociente, que es el otro factor, vendrá dividido ó multiplicado por el mismo número (67-5.°).

73. Cuando la division es inexacta, *al multiplicar el divisor, queda dividido el cociente, permaneciendo el mismo resto; pero si se divide el divisor, el cociente, ademas de quedar multiplicado por el mismo número, viene aumentado en las unidades que resultan de dividir el resto por el nuevo divisor.*

Representando por las mismas letras qne anteriormente al dividendo, divisor, cociente y resto, se tiene

$$A = BQ + R \quad [1].$$

Si se multiplica el divisor B por el número M, es necesario, para que el producto BQ no se altere, dividir el factor Q por el mismo número M (67-5.°); de modo que se tendrá

$$A = BM\frac{Q}{M} + R;$$

donde vemos que multiplicando el divisor B por M, el cociente *aparece dividido por el mismo número, no sufriendo alteracion la resta.*

Si en la igualdad [1] dividimos el divisor B por el número M, se tendrá que multiplicar el otro factor Q por el mismo número para que el producto $B \times Q$ no se altere (67-5.°); de modo que se tendrá

$$A = \frac{B}{M} \times QM + R \quad [2];$$

pero como el divisor ha disminuido convirtiéndose en $\frac{B}{M}$, podrá suceder que esté contenido en R un cierto número de veces; de modo que si representamos por Q′ el cociente y por R′ el resto de la division de R por $\frac{B}{M}$, tendremos

$$R = \frac{B}{M} \times Q' + R';$$

sustituyendo este valor de R en la igualdad [2], se tiene

$$A = \frac{B}{M} \times QM + \frac{B}{M} \times Q' + R';$$

finalmente, sacando $\frac{B}{M}$ por factor comun, será

$$A = \frac{B}{M}(QM + Q') + R';$$

donde vemos que el cociente Q, *ademas de venir multiplicado por* M, *número por el cual se dividió el divisor* B, *viene aumentado en el cociente que resulta de dividir el resto* R *por el nuevo divisor* $\frac{B}{M}$.

74. De lo dicho anteriormente resulta que en toda division exacta, al cociente le pasa lo mismo que al dividendo y lo contrario que al divisor; es decir, que multiplicando ó partiendo el dividendo por un número, el cociente viene multiplicado ó partido por el mismo número; y por el contrario, multiplicando ó partiendo el divisor, el cociente queda dividido ó multiplicado. De aquí se deduce: 1.°, *que un cociente se multiplica por un número multiplicando el dividendo, ó dividiendo el divisor por dicho número:* y aunque generalmente se emplea el primer método, es porque no siempre se puede dividir exactamente el divisor; 2.°, *que un cociente se divide por un número, dividiendo el dividendo ó multiplicando el divisor por dicho número:* y por la misma razon que ántes, se emplea más generalmente el segundo que el primer método; 3.°, *un cociente no se altera, aunque dividendo y divisor se multipliquen ó partan por un mismo número.*

75. Si la division no es exacta, *al multiplicar ó dividir el dividendo y divisor por un mismo número, el cociente no varía; pero el resto viene multiplicado ó partido por el mismo número.*

Para demostrarlo supongamos que A sea el dividendo, B el divisor, Q el cociente, y R el resto: de modo que se tendrá

$$A = BQ + R.$$

Si multiplicamos ó partimos esta igualdad por un número M, tendremos

$$AM = BM \times Q + RM \qquad [52 \text{ y } 58],$$

ó

$$\frac{A}{M} = \frac{B}{M} \times Q + \frac{R}{M} \qquad [55 \text{ y } 62].$$

Donde vemos que en ámbos casos el cociente Q de los números A y B no ha variado, miéntras que el resto R viene multiplicado ó partido por el número por que se multiplicó ó partió el dividendo y divisor.

Abreviaciones que pueden hacerse en la multiplicacion y division.

76. Fundados en las diferentes alteraciones que experimentan los resultados de la multiplicacion y division por las que sufren los datos, podremos deducir algunas abreviaciones que pueden hacerse al efectuar dichas operaciones.

1.ª Para multiplicar dos números que terminan en ceros, *se multiplican los números que forman las cifras significativas, y á la derecha del producto se ponen tantos ceros como hay en ámbos factores.*

Sean dos números cualesquiera, 24000 y 1200, los que se han de multiplicar: representando todo número que termina en ceros al producto de dicho número por la unidad seguida de tantos ceros como hay á la derecha de éste, tendremos

$$24000 \times 1200 = 24 \,.\, 1000 \times 12 \,.\, 100;$$

y como el órden de factores no altera el producto (56), se tiene

$$24 \times 1000 \times 12 \times 100 = 24 \times 12 \times 1000 \times 100.$$

Ahora bien,

$$24 \times 12 = 288 \text{ y } 1000 \times 100 = 100000;$$

luego

$$24 \times 12 \times 1000 \times 100 = 288 \times 100000 = 28800000 \ (59).$$

Donde vemos que el producto 28800000 se forma poniendo á la derecha del que resulta de multiplicar las cifras significativas, los ceros que tienen ámbos factores.

2.ª Para multiplicar un número por otro cuyas cifras sean todas nueves, *se escriben á la derecha del número tantos ceros como nueves tiene el multiplicador, y del resultado se resta una vez el multiplicando.*

Sean los números 38754 y 9999 los que se han de multiplicar. Si añadimos al multiplicador 9999 una unidad, obtendremos la unidad seguida de tantos ceros como nueves hay, es decir, 10000; si ahora multiplicamos el 38754 por 10000, encontraremos el producto 387540000, el cual contendrá al multiplicando una vez más de las que se pedian, de modo que si de dicho producto restamos el multiplicando, tendremos

$$387540000 - 38754 = 387501246,$$

que es el producto pedido.

En la práctica no se ponen los ceros, sino que se hacen las operaciones mentalmente; así

$$38754 \times 9999 = 387501246;$$

cuyo resultado se halla (16-3.er CASO), diciendo: de 4 á diez 6, de 5 á nueve 4, de 7 á nueve 2, de 8 á nueve 1, de 3 á tres 0, las demas cifras se ponen en el mismo órden en que están escritas, con lo que se tiene el producto hallado.

3.ª *Siempre que el dividendo y divisor puedan dividirse por un mismo número, podrá efectuarse esta division teniendo presente que el cociente no varía, pero que el resto viene dividido por el mismo número* (75).

Por esto, cuando el dividendo y divisor terminen en ceros, podrá quitarse en ámbos igual número de ellos, lo cual equivale á dividir el dividendo y divisor por un mismo número; de modo que el cociente que se halle será el que buscamos, y la resta vendrá dividida por la unidad seguida de tantos ceros como se suprimieron en el dividendo.

Sea 24000 : 1200 que da 20 de cociente. Quitando dos ceros á la derecha de ámbos, se tiene 240 : 12 que tambien da 20 de cociente.

Supongamos en segundo lugar, que se ha de dividir el número 24000 por 1800. Efectuada la division vemos que da 13 de cociente y 600 de resto; luego

$$24 = 1800 \times 13 + 600.$$

Si ahora quitamos dos ceros al dividendo y divisor, hallaremos el mismo cociente 13; pero el resto es 6, y por consiguiente 100 veces menor que el verdadero: de modo que por la segunda division, que evidentemente es más fácil que la primera, podremos conocer el cociente y resto de los dos números propuestos, teniendo presente que dicho resto viene dividido por la unidad seguida de tantos ceros como se separaron en el divisor.

4.ª *Cuando el divisor solamente termina en ceros, se suele abreviar esta operacion suprimiendo los ceros en el divisor y separando á la derecha del dividendo tantas cifras como ceros tenia aquel, y el cociente de los dos números que resultan es igual al de los números dados. El resto verdadero de la division se obtiene poniendo á la derecha del resto hallado las cifras que se separaron á la derecha del dividendo.*

En efecto, el dividendo ha sufrido dos alteraciones: 1.ª se ha disminuido en tantas unidades como expresa el número separado á su derecha; 2.ª se ha dividido por la unidad seguida de tantos ceros como tiene el divisor. Por la primera, el cociente no ha variado, puesto que se ha quitado un número menor que el divisor (68, *observ.*); pero el resto viene disminuido en tantas unidades como se separaron en el dividendo: por la segunda, tampoco varía el cociente, porque no se ha hecho más que dividir el dividendo y divisor por un mismo número; pero en cambio el resto viene dividido por la unidad seguida de tantos ceros como se suprimieron en el dividendo (75); luego si el resto se multiplica por la unidad, seguida de tantos ceros como se suprimieron en el divisor, y al producto se le añaden las unidades que se separaron en el dividendo, tendremos el resto verdadero.

Sean los números que se han de dividir 84795 y 2300. Separando á la derecha del dividendo las dos cifras últimas y haciendo abstraccion de los ceros en el divisor, quedará la operacion reducida á dividir 847 por 23, lo que da 36 de cociente y 19 de resto; luego el cociente de los dos números propuestos será 36, y el resto $19 \times 100 + 95 = 1900 + 95 = 1995$.

LECCION VIII.

Divisibilidad. — Definiciones. — Principios en que se funda la divisibilidad de los números.

DIVISIBILIDAD.

Definiciones.

77. *Divisibilidad es la parte de la Aritmética que tiene por objeto hallar las condiciones á que debe satisfacer un número para que sea divisible por otro.*

Si un número dividido por otro da un cociente exacto en números enteros, se dice que el primero es *divisible* por el segundo, y que el segundo *divide* al primero.

Se llama *duplo, triplo* y en general *múltiplo* de un número, lo que resulta de multiplicarle por dos, tres y en general por un número entero cualquiera. Y se llama *submúltiplo, factor* ó *divisor* de un número, el que le divide exactamente.

Se llama número *par* el que es divisible por 2, y número *impar* el que no lo es; sus expresiones son $2n$ y $2n+1$.

Principios en que se funda la divisibilidad de los números.

78. *Si un número divide á varios, divide tambien á su suma.*

Sean A, B, C, D... los números que son divisibles por el número n; y Q, Q', Q'', Q'''... los cocientes enteros: se tendrá la serie de igualdades

$$A = nQ$$
$$B = nQ'$$
$$C = nQ''$$
$$D = nQ'''$$
$$\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots$$

De modo que sumando ordenadamente y sacando n factor comun, se tendrá

$$A + B + C + D + \ldots = n(Q + Q' + Q'' + Q''' + \ldots).$$

Donde vemos que la suma $A + B + C + D + \ldots$ es divisible por n y da por cociente la suma de los cocientes de los sumandos.

Consecuencia. *Si un número divide á otro, divide tambien á cualquier múltiplo suyo.*

Sea AP el múltiplo de A, número divisible por n.

Por ser $AP = A + A + A + \ldots$, repetido P veces, se sigue, que siendo A divisible por n, lo será la suma $A + A + A + \ldots$; pero esta suma es igual al múltiplo AP, luego el múltiplo de A tambien es divisible.

79. *Si un número divide á dos, divide tambien á su diferencia.*

Sean los dos números A y B divisibles por n, sus cocientes respectivos Q y Q'; tendremos

$$A = nQ$$
$$B = nQ';$$

restando estas dos igualdades y sacando n factor comun, se tendrá

$$A - B = n(Q - Q').$$

Donde vemos que la diferencia $A - B$ es divisible por n y da por cociente la diferencia de los cocientes Q y Q'.

Este principio se enuncia tambien diciendo: si *un número divide á una suma de dos sumandos y á uno de éstos, divide necesariamente al otro.*

En efecto, el segundo sumando es la diferencia que hay entre el primero y la suma; de modo, que siendo estos dos últimos números divisibles por un tercero, su diferencia, que es el otro sumando, tambien lo será.

Consecuencia. *Si un número divide al dividendo y divisor de una division, divide necesariamente al resto de la misma.*

Sea n el número que divide al dividendo A y divisor B; llamando Q al cociente y R al resto, tendremos

$$A = BQ + R.$$

Por dividir n á B, divide á su múltiplo BQ (78, *cons.*), y por dividir á A y BQ, divide á R.

Observaciones. 1.ª *Si un número divide al divisor y resto,* *divide tambien al dividendo.* Porque dividiendo al divisor B, divide á su múltiplo BQ, y por lo tanto (78) al dividendo A.

2.ª Si un número divide al dividendo y resto, tendrá que dividir (79) al producto del divisor por el cociente; pero no podrá decirse que dividirá á ninguno de ellos en particular.

80. *Si un número divide á uno de dos sumandos y no divide al otro, tampoco dividirá á la suma, y el resto de la division será el mismo que dé el sumando no divisible.*

La primera parte puede demostrarse por reduccion al absurdo. En efecto, siendo divisible uno de los sumandos y el otro no, la suma tampoco lo será; porque si fuera divisible, tendria que serlo tambien el otro sumando (79), lo cual es contra la hipótesis; luego no puede ser divisible.

En cuanto á la segunda parte, representando por A y B los sumandos, de los cuales uno es divisible por el número n y el otro no, tendremos

$$A = nQ$$
$$B = nQ' + R.$$

Sumando ordenadamente y sacando n por factor comun en los dos primeros sumandos del segundo miembro, se tendrá

$$A + B = n(Q + Q') + R.$$

Donde se ve que la suma $A + B$ de los dos números no es divisible por n, puesto que da un resto R, que es precisamente el mismo que daba el sumando no divisible.

81. *Si un número divide al minuendo y no divide al sustraendo, tampoco dividirá á la diferencia, y el resto de la division será lo que le falte al que da el sustraendo para ser igual al divisor.*

En efecto, sea n un número que divide al minuendo A de una diferencia y que no divide al sustraendo B de la misma; representando por Q el cociente exacto de la division de A por n, y por Q' y R el cociente entero y resto de la de B por n, tendremos

$$A = nQ$$
$$B = nQ' + R.$$

Restando de la primera igualdad la segunda, y sacando n factor comun en los dos primeros términos del segundo miembro, se tiene

$$A - B = n(Q - Q') - R.$$

Debiéndose disminuir R del producto del divisor por el cociente para obtener el dividendo, segun indica la igualdad anterior, es señal que la division está hecha por exceso; de modo que quitando una unidad del cociente, y añadiendo una vez el otro factor n para que haya compensacion (57), quedará la division hecha por defecto, y se tendrá, llamando D á la diferencia $A - B$,

$$D = n(Q - Q' - 1) + n - R.$$

Donde vemos que el dividendo D, que expresa la diferencia de los números A y B, dividido por n, no da cociente exacto, con lo cual queda probada la primera parte del principio; el resto de la division es $n - R$, es decir, lo que le falta á R para ser igual al divisor n, que es lo segundo que debiamos demostrar.

82. *Si se tienen varios números que no son divisibles por otro, la suma lo será, siempre que lo sea la de los restos que dan los sumandos.*

Sean A, B, C, D... varios números que no son divisibles por n; Q, Q', Q'', Q'''... los cocientes respectivos de dividir dichos números por n, y R, R', R'', R'''... los restos. Tendremos la serie de igualdades

$$\begin{aligned} A &= nQ + R \\ B &= nQ' + R' \\ C &= nQ'' + R'' \\ D &= nQ''' + R''' \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

que sumadas y sacando n factor comun, nos dan

$$A + B + C + D + \ldots = n(Q + Q' + Q'' + Q''' + \ldots) + (R + R' + R'' + R''' + \ldots).$$

Donde vemos que la suma $A + B + C + D + \ldots$ de los números propuestos está descompuesta en dos partes: una $n(Q + Q' + Q'' + Q''' + \ldots)$, que evidentemente es divisible por n, y otra $(R + R' + R'' + R''' + \ldots)$ que es la suma de los restos que dan las divisiones de los sumandos; y como por hipótesis esta suma es divisible por n, lo será tambien (78) $A + B + C + D + \ldots$, que es lo que debiamos demostrar.

Observacion. *Si la suma de los restos no es divisible por un cierto número, tampoco lo será la de los números propuestos* (80), *y el resto de la division será el que dé la suma de los restos.*

83. *Si un número no divide á otro, dividirá sin embargo á un múltiplo suyo, siempre que divida al mismo múltiplo del resto.*

Sea A el número que no es divisible por n, y AP el múltiplo de A.

No siendo A divisible por n, tendremos, llamando Q al cociente y R al resto,

$$A = nQ + R,$$

de donde

$$AP = nPQ + RP.$$

El múltiplo AP, por lo que se ve, está descompuesto en dos sumandos, uno nQP que es evidèntemente divisible por n, y otro RP múltiplo de R que tambien lo es por hipótesis; luego AP tambien lo será (78).

Si el múltiplo RP no fuese divisible por el número n, tampoco lo seria AP (80), siendo el resto el que diese el mismo múltiplo RP.

84. *Si un número no divide á dos, tampoco dividirá á la diferencia, á no ser que los restos obtenidos sean iguales.*

Sean los dos números A y B que no son divisibles por n y dan los restos R y R'; tendremos, llamando Q y Q' á los cocientes,

$$A = nQ + R$$
$$B = nQ' + R'.$$

Restando y sacando n factor comun, se tendrá

$$A - B = n(Q - Q') + (R - R').$$

Donde vemos que la diferencia $A - B$ de los dos números dados está descompuesta en dos sumandos; uno $n(Q - Q')$, que es evidentemente divisible por n, y otro $R - R'$, que no lo es;

porque siendo R y R′ menores que n, su diferencia $R - R'$ tambien lo será, y por consiguiente no puede ser divisible por n, y segun lo ya demostrado (80), $A - B$ tampoco lo será; pero si $R = R'$, entónces $R - R' = 0$, y $A - B = n(Q - Q')$, número que evidentemente es divisible por n.

Observacion. Se ha supuesto tácitamente en todos los principios en que se han considerado números no divisibles, que los cocientes se han hallado por defecto, en cuyo caso las restas obtenidas hay que agregarlas á los productos del divisor por el cociente entero; pero si los cocientes se obtienen unos por exceso y otros por defecto, los principios tienen que sufrir alguna modificacion en el enunciado ordinario; cuya modificacion será la que resulte de considerar las sumas ó restas de los residuos, no como sumas aritméticas, sino como sumas ó restas algebráicas (50).

Así, por ejemplo, en el último principio que se ha demostrado, hemos visto que dos números que divididos por un tercero dan un mismo resto R, su diferencia es divisible por el mismo número; además, que si las restas no son iguales, la diferencia de los números no puede ser divisible por el número en cuestion. En la demostracion, hemos supuesto tácitamente al establecer las igualdades

$$A = nQ + R \text{ y } B = nQ' + R',$$

que las divisiones están hechas por defecto, y de estas igualdades hemos deducido

$$A - B = n(Q - Q') + R - R'.$$

Ahora bien, si la primera division la hubiéramos hecho por defecto y la segunda por exceso, ó al contrario, hubiéramos obtenido los dos pares de igualdades

$$\begin{matrix} A = nQ + R \\ B = nQ' - R' \end{matrix} \quad \text{ó} \quad \begin{matrix} A = nQ - R \\ B = nQ' + R', \end{matrix}$$

que restadas nos hubieran dado (51)

$$A - B = n(Q - Q') + R - (-R') = n(Q - Q') + R + R'$$

ó

$$A - B = n(Q - Q') - R - R' = n(Q - Q') - (R + R');$$

donde vemos que la diferencia de los dos números A y B siempre viene expresada por la suma ó diferencia de dos cantidades, una n (Q — Q′) que es divisible por n, y otra que expresa la diferencia algebráica de los restos R y R′; de modo que si esta diferencia es cero ó divisible por n, la diferencia de los dos números A y B tambien lo será, y dejará de serlo si aquella no es cero ó divisible por n.

LECCION IX.

Caractéres de divisibilidad de un número por 2, 5, 4, 25, 8, y 125. — Caractéres de divisibilidad de un número por 3 y 9. — Caractéres de divisibilidad de un número por 11.

Caractéres de divisibilidad de un número por 2, 5, 4, 25, 8, y 125.

85. *Un número es divisible por* 2, *cuando su última cifra de la derecha es cero ó par.*

En efecto, si la última cifra de la derecha de un número es cero, será múltiplo de 10; y como 10 es divisible por 2, su múltiplo y por consiguiente el número tambien lo será.

Si la última cifra es par, descomponiendo el número, que podrá estar representado por N = ... *fedcba*, en sus decenas y unidades, tendremos

$$N = \ldots fedcb \,.\, 10 + a: \qquad [1]$$

el primer sumando, por ser múltiplo de 10, es divisible por 2; el segundo lo es por hipótesis; luego la suma, y por consiguiente el número N, tambien lo será (78).

86. *Si la última cifra de un número no es cero ni cifra par, el número no será divisible por* 2.

En efecto, en la igualdad [1] se ve, que siendo impar la cifra a de las unidades, no es divisible por 2; y como el primer sumando lo es, se sigue (80) que la suma, y por consiguiente el número N, no puede serlo.

87. *Un número es divisible por* 5, *cuando su última cifra de la derecha es cero ó cinco.*

88. *Si la última cifra de un número no es cero ni cinco, dicho número no será divisible por* 5.

La demostracion es la misma que para el 2.

89. *Un número es divisible por* 4, *cuando sus dos últimas cifras de la derecha son ceros ó forman un número divisible por* 4.

En efecto, si las dos últimas cifras de un número son ceros, será múltiplo de 100, y como 100 es divisible por 4, su múltiplo, y por consiguiente el número, tambien lo será.

Si las dos últimas cifras del número, que podrá estar representado por N = ... *fedcba*, forman un número divisible por 4, descomponiéndole en sus centenas y unidades, tendremos

$$N = \ldots fedc \,.\, 100 + ba: \qquad [2]$$

la primera parte, por ser un múltiplo de 100, es divisible por 4; la segunda lo es tambien por hipótesis: luego la suma, y por consiguiente el número N, tambien lo es (78).

90. *Si las dos últimas cifras de un número no son ceros ni forman otro divisible por cuatro, el número no será divisible por* 4.

En efecto, de la igualdad [2] se deduce, que siendo la primera parte divisible por 4, por ser múltiplo de 100, y no siéndolo la segunda por hipótesis, el número N tampoco lo será (80).

91. *Un número es divisible por* 25, *cuando sus dos últimas cifras de la derecha sean ceros ó forman un número divisible por* 25.

92. *Si las dos últimas cifras de la derecha de un número no son ceros ni forman otro divisible por* 25, *el número tampoco será divisible por* 25.

La demostracion es la misma que para el 4.

93. Análogamente se demostraria que *si las tres últimas cifras de la derecha de un número son ceros ó forman un número divisible por* 8 *ó* 125, *el número tambien será divisible por* 8 *ó* 125.

Y si no son ceros ni forman un número que sea divisible por cualquiera de estos dos, el propuesto tampoco lo será.

En general, un número N será divisible por 2^n ó 5^n cuando sus n últimas cifras sean ceros ó formen un número divisible por 2^n ó 5^n, y no lo será en el caso contrario.

Caractéres de divisibilidad de un número por 3 ó 9.

94. *Un número es divisible por* 3 *ó* 9 *cuando la suma del valor numérico de sus cifras lo sea tambien.*

Para demostrar este principio, conviene probar ántes el siguiente

LEMA. *Toda potencia de* 10 *disminuida en una unidad, es divisible por* 9, *y por consiguiente por* 3.

En efecto, una potencia cualquiéra de 10, siendo el producto de tantos factores iguales á 10 como unidades tiene el exponente, será igual á la unidad seguida de tantos ceros como unidades tiene dicho exponente. Ahora bien, si de la unidad seguida de ceros se quita una unidad, quedará un número compuesto de tantos nueves como ceros acompañaban á dicha unidad; pero un número que sólo tenga nueves, es evidentemente divisible por 9, y por consiguiente por 3: luego toda potencia de 10 disminuida en una unidad, es divisible por 3 y 9.

Justificado este lema, pasemos á demostrar el principio, y sea en general $N = \ldots fedcba$ el número propuesto.

Descomponiendo este número en sus diferentes unidades, tendremos

$$N = a + 10b + 10^2c + 10^3d + 10^4e + 10^5f + \ldots$$

Si á las diferentes potencias de 10 que figuran en la igualdad anterior, les quitamos una unidad, resultarán los números $(10-1)b$, $(10^2-1)c$, $(10^3-1)d$, $(10^4-1)e$, $(10^5-1)f\ldots$ que serán, segun el lema anterior y el número (78, *cons.*), divisibles por 3 y 9; luego la suma tambien lo será (78). Pero habiendo disminuido cada factor de los diferentes productos anteriores en una unidad, éstos vendrán disminuidos en una vez el otro factor; luego agregando las cantidades que hemos disminuido al quitar la unidad á las diferentes potencias de 10, podremos poner el número N bajo la forma

$$N = \begin{cases} (10-1)b + (10^2-1)c + (10^3-1)d + (10^4-1)e + \ldots \\ a + b + c + d + e + \ldots \end{cases}$$

ó lo que es lo mismo

$$N = M + S, \qquad [1]$$

siendo M la suma de los números de la primera línea, y S la de los números de la segunda.

Ahora bien, si suponemos que la suma S del valor numérico de las cifras del número N es divisible por 3 ó 9, como M siempre es divisible por estos dos números segun hemos visto, se sigue, que la suma M + S, y por consiguiente N, tambien lo será.

95. *Si la suma del valor numérico de las cifras de un número no es divisible por* 3 *ni por* 9, *el número tampoco lo será.*

En efecto, de la igualdad [1] se deduce que siendo M divisible por 3 y 9, si la suma S de las cifras del número no lo fuera, el número N tampoco lo seria (80).

Caractéres de divisibilidad de un número por 11.

96. *Un número es divisible por* 11 *cuando la diferencia que hay entre la suma de las cifras de lugar impar, y la de las cifras de lugar par, es cero ó divisible por* 11.

Para demostrar este principio, conviene anteponer los dos lemas siguientes:

1.° *Toda potencia par de* 10 *disminuida en una unidad, es divisible por* 11.

2.° *Toda potencia impar de* 10 *aumentada en unidad, es divisible por* 11.

1.° Toda potencia par de 10 disminuida en una unidad, es igual á un número que está compuesto de un número par de nueves; pero cada par de nueves es divisible por 11; luego todo el número lo será, con lo cual queda demostrado lo primero que se queria.

2.° Toda potencia impar de 10 aumentada en una unidad podrá representarse por $10^{2n+1} + 1$; pero, segun la definicion de potencia, se tiene

$$10^{2n+1} = 10^{2n} \times 10.$$

Quitando una unidad al factor 10^{2n}, y aumentando al resultado el otro factor 10, que es en lo que se disminuyó el producto (57), se tendrá

$$10^{2n+1} = (10^{2n} - 1) \times 10 + 10;$$

aumentando ahora ámbas cantidades en una unidad, tendremos

$$10^{2n+1} + 1 = (10^{2n} - 1) \times 10 + 11.$$

Donde vemos que el primer sumando del segundo miembro de esta igualdad, por ser un múltiplo de una potencia par de 10. disminuida en una unidad, es divisible por 11; el segundo evidentemente tambien lo es; luego $10^{2n+1} + 1$ es divisible por 11, segun queriamos demostrar.

Justificados los dos lemas anteriores, pasemos á demostrar el principio, y sea $N = \ldots fedcba$ el número propuesto, que descompuesto en sus diferentes unidades, nos dará

$$N = a + 10b + 10^2c + 10^3d + 10^4e + 10^5f + \ldots$$

Observando ahora que las potencias de 10 que hay en el segundo miembro son alternativamente pares é impares, podremos hacer, segun los dos lemas demostrados, que estos números sean divisibles por 11, con sólo disminuir y aumentar alternativamente la unidad á dichas potencias: de modo que aumentando y disminuyendo, alternativamente tambien, las cifras del número para compensar el error cometido (57) al aumentar ó disminuir la unidad á cada uno de los factores de los diferentes productos, tendremos que el número N podrá ponerse bajo la forma

$$N = \begin{cases} (10+1)b + (10^2-1)c + (10^3+1)d + (10^4-1)e + \ldots \\ a \quad - \quad b \quad\quad + \quad c \quad\quad - \quad d \quad\quad + \quad e - \ldots \end{cases}$$

ó lo que es lo mismo

$$N = M \pm D, \qquad [2]$$

siendo M la suma de los números de la primera línea, que por ser todos divisibles por 11, dicha suma M tambien lo será, y D la diferencia numérica que hay entre la suma de las cifras de lugar par y de lugar impar, es decir,

$$D = a - b + c - d + e - \ldots = a + c + e + \ldots - (b + d + \ldots).$$

Ahora bien, si la suma $a + c + e + \ldots$ de las cifras de lugar impar es mayor que la suma $b + d + f + \ldots$ de las cifras de lugar par, tendremos que agregar á M dicha diferencia D, y en el caso de ser la primera suma menor que la segunda, tendremos que restar de M la diferencia D; por lo que hemos puesto en la expresion [2] del número N el signo $\pm$, segun que la suma de las cifras de lugar impar sea mayor ó menor que la de las cifras de lugar par.

Esto supuesto, se ve que si la diferencia D es cero, el número N queda reducido en la igualdad [2] á M, número que, segun hemos visto, es divisible por 11. Si D no es cero, y sí divisible por 11, el número N se halla descompuesto en dos partes M y D, que son divisibles por 11; luego su suma ó su diferencia, segun se tome el signo + ó —, tambien lo será (78 y 79).

97. *Si la diferencia que hay entre la suma de las cifras de lugar impar y las del lugar par no es cero ni divisible por* 11, *el número tampoco lo será.*

En efecto, la igualdad [2] nos indica que siendo siempre M divisible por 11, y no siéndolo D, no podrá serlo ni su suma, ni su diferencia (80 y 81), y por consiguiente el número N no será divisible por 11.

LECCION X.

Método general para conocer cuándo un número es divisible por otro. Aplicacion á los números 7, 13 y 37. — Resto de la division de un número por otro cuyo carácter de divisibilidad se conoce. — Prueba de la multiplicacion por nueve.

Método general para conocer cuándo un número es divisible por otro. Aplicacion á los números 7, 13 y 37.

98. Vamos á exponer un método general para deducir las condiciones á que debe satisfacer un número N para que sea divisible por otro n.

Consiste este método en descomponer el número N en dos partes: una que sea exactamente divisible por n, y otra que nos exprese la condicion de divisibilidad; condicion que podrá ser más ó ménos sencilla, y por lo tanto su aplicacion será de mayor ó menor interes en la práctica.

Sea, como siempre,

$$N = a + 10b + 10^2c + 10^3d + 10^4e + 10^5f + 10^6g + 10^7h + \ldots$$

Dividiendo ámbas expresiones por n, se tendrá (55)

$$\frac{N}{n} = \frac{a}{n} + \frac{10b}{n} + \frac{10^2c}{n} + \frac{10^3d}{n} + \frac{10^4e}{n} + \frac{10^5f}{n} + \ldots \qquad [1]$$

Debiendo ser el primer miembro de esta igualdad un número entero, el segundo tambien lo será; para lo cual es necesario que sea cero ó divisible por n la suma algebráica de los restos que se obtienen en las divisiones indicadas en el segundo miembro (82). Y recíprocamente, si dicha suma algebráica es cero ó divisible por n, el segundo miembro, lo mismo que el primero, serán números enteros; con lo cual queda hallada la condicion necesaria y suficiente para que N sea divisible por n.

Para hallar la suma de estos restos, dividamos por n las diferentes potencias de 10 que figuran en el segundo miembro, y encontraremos un número de restos distintos, igual á lo más á $n - 1$, que se repetirán periódicamente segun vaya creciendo el exponente de la potencia. Con el objeto de que el número de restos diferentes sea el menor posible, conviene hacer las divisiones por defecto ó exceso, segun convenga para que el resto que se obtenga no sea mayor que la mitad del divisor n, en cuyo caso el número de estos restos será á lo más igual á

$$\frac{1}{2}(m + 1).$$

Suponiendo hechas estas divisiones y llamando r, r', r'', r''' ... á los diferentes restos que se obtienen, ya sea por defecto ya por exceso, al dividir por n la unidad seguida de uno, dos, tres, etc. ceros, los restos de las divisiones indicadas en el segundo miembro de la igualdad [1] serán a, rb, $r'c$, $r''d$ ... (70); luego la condicion pedida será que la suma algebráica

$$a \pm rb \pm r'c \pm r''d \pm r'''e \pm \ldots$$

sea cero ó un número divisible por n.

Aplicando cuanto hemos dicho al número 7, vemos que los restos de dividir por 7 las diferentes potencias de 10, son 1, 3, 2, 6, 4, 5, 1, 3 ...; y tomando los cocientes por exceso en el caso de ser el resto mayor que la mitad del divisor 7, tendremos que los valores numéricos de los nuevos restos serán

$$1,\ 3,\ 2,\ 1,\ 3,\ 2,\ 1\ \ldots$$

de los cuales tomaremos los primeros como sumandos, y por lo tanto con el signo $+$; y los segundos como sustraendos ó con el signo $-$; de modo que si se tiene

$$N = a + 10b + 10^2c + 10^3d + 10^4e + 10^5f + 10^6g + \ldots,$$

la condicion para que el número N sea divisible por 7, será que su suma

$$a + 3b + 2c - d - 3e - 2f + g + 3h + \ldots$$

sea cero ó divisible por 7.

Si esta condicion no se verifica, el número N no es divisible por 7; luego

99. *Para que un número sea divisible por 7, es necesario y suficiente que dividiéndole en períodos de tres cifras, principiando por la derecha, y multiplicando cada una de estas cifras por los números respectivos 1, 3, 2, la suma de los productos de los períodos de lugar impar que así resulten, ménos la de los productos de los períodos de lugar par, sea cero ó divisible por 7.*

Haciendo lo mismo con el número 13, veremos que los restos de dividir por 13 las diferentes potencias de 10, son 1, 10, 9, 12, 3, 4, 1, 10 ... y tomando los complementarios (*) de los que pasan de la mitad de 13, tendremos los restos

$$1,\ -3,\ -4,\ -1,\ 3,\ 4,\ 1,\ -3,\ -4,\ -1,\ \text{etc.},$$

en los cuales los signos están de manifiesto: de modo que la condicion de divisibilidad de un número N por 13, estará expresada por ser cero ó divisible por 13 la suma algebráica.

(*) Entendemos por resto *complementario* el que se obtiene efectuando la division por exceso.

$$a - 3b - 4c - d + 3e + 4f - g - 3h - \ldots$$

Si esta suma no es cero ni divisible por 13, el número N no será divisible por 13; luego

100. *Para que un número sea divisible por* 13, *es necesario y suficiente que separando la primera cifra de la derecha, dividiendo lo que queda en períodos de tres cifras, y multiplicándolas respectivamente por los números* 3, 4 *y* 1; *la suma de los productos de los períodos de lugar impar, contando como tal la cifra separada de las unidades, ménos la suma de los productos de los períodos de lugar par, sea cero ó divisible por* 13.

Aplicando por último la fórmula al número 37, hallaremos por restos 1, 10, 26, 1, 10, 26, etc., los cuales se reducen, tomando los complementarios de los que son mayores que la mitad de 37, á 1, 10 — 11, 1, 10 — 11; etc.; y la condicion será que la suma algebráica

$$a + 10b - 11c + d + 10e - 11f + \ldots$$

sea cero ó divisible por 37.

Si esta suma no es cero ni divisible por 37, el número N no será divisible por 37; luego

101. *Para que un número sea divisible por* 37, *es necesario y suficiente que dividiéndole en períodos de dos y una cifra, la suma de los primeros ménos la de los segundos multiplicados por* 11 *sea cero ó divisible por* 37.

Medio de hallar el resto de la division de un número por otro cuyo carácter de divisibilidad se conoce, sin hacer la division.

102. El método que hemos seguido para hallar los caractéres de divisibilidad de un número por otro número n, consiste en descomponer el número dado en dos partes: una que es siempre divisible por el número en cuestion, y otra que expresa la condicion de divisibilidad: de modo que si esta segunda parte es cero ó divisible por n, el número lo será tambien, y el resto de la division será por lo tanto cero; pero si dicha segunda parte no es cero ni divisible por el número de que se trata, el número

propuesto tampoco será divisible, y la division dará por lo tanto un resto distinto de cero, que es lo que precisamente tratamos de hallar.

Ahora bien, si el valor numérico de la segunda parte de las dos en que hemos descompuesto el número se ha de agregar al de la primera, el resto de esta segunda parte será el mismo que dará el número propuesto (80). Pero si por el contrario el valor numérico de dicha segunda parte se ha de restar de la primera para obtener el número, en este caso el resto no será el que dé la segunda parte, sino lo que le falte á este resto para ser igual al número divisor (81).

Así, por ejemplo, el resto que da la division de un número por 3 ó 9 será siempre el que da la suma del valor numérico de sus cifras; porque siempre se descompone el número en un múltiplo de 9, y por consiguiente de 3, más la suma del valor numérico de sus cifras: luego el resto de la division de esta suma será siempre el del número.

En el caso de hallar el resto de la division de un número por 11, debemos observar que el carácter de divisibilidad se ha determinado descomponiendo el número en un múltiplo de 11 más la suma de las cifras del lugar impar, ménos la suma de las cifras de lugar par; y por consiguiente, cuando la primera suma es mayor que la segunda, el número está representado por la suma del múltiplo de 11 y la diferencia de ámbas sumas, y por lo tanto el resto que dé esta diferencia será el del número propuesto. Pero si la suma de las cifras de lugar impar es menor que la de las cifras de lugar par, el número estará representado por la diferencia de las dos partes anteriormente citadas; de modo que si la segunda parte, es decir, la diferencia entre las sumas de las cifras de lugar impar y par no es divisible por 11, el resto que dé no será el que da el número, sino lo que le falta á dicho resto para ser igual á 11.

Del mismo modo se hallaria el resto de la division de un número por otro cuyo carácter de divisibilidad se conociese, sin necesidad de practicar la division.

Prueba de la multiplicacion por nueve.

103. Una de las aplicaciones de poder hallar con facilidad el resto de la division de un número por otro, es la prueba de la multiplicacion llamada del 9.

Sin embargo de que la mejor prueba de una operacion es repetirla hasta persuadirse de su exactitud, vamos á exponer la llamada del 9, la cual podria aplicarse á cualquiera de las operaciones; pero que nosotros sólo la aplicaremos á la de multiplicar, haciendo ver al mismo tiempo hasta qué punto es verdadera.

Esta prueba se enuncia diciendo: *Si se suman las cifras del multiplicando y de dicha suma se quitan los nueves que se puedan y se anota el número resultante*, lo que equivale á hallar el resto de la division por 9, *y hacemos lo mismo con el multiplicador y producto; el resto que éste dé, tiene que ser, para que la operacion esté bien hecha, el mismo que da el producto de los dos restos del multiplicando y multiplicador.*

En efecto, habiendo descompuesto los factores y el producto en un múltiplo de 9 más los restos; llamando A al multiplicando, B al multiplicador, P al producto y R, R′, R″ á los restos respectivos de la division por 9, tendremos

$$A = m9 + R$$
$$B = m'9 + R',$$

de donde multiplicando se hallará (53)

$$A \times B = mm'9^2 + m'R9 + mR'9 + RR';$$

y como los primeros tres números son múltiplos de 9, su suma tambien lo será (78); luego se tendrá

$$A \times B = M9 + RR',$$

representando por M9 la suma de los tres primeros números.

Ahora bien, $\quad A \times B = P = m''9 + R'';$
luego $\quad M9 + RR' = m''9 + R''.$

De modo que siendo R″ el resto que da el número P, y el de

$A \times B$ el que dé el producto RR', se sigue que el resto R'' del producto P, es el mismo que da el producto RR' de los dos restos del multiplicando y multiplicador; luego cuando la operacion esté bien hecha, se debe verificar que el resto de dividir por 9 el producto de los dos restos de los factores, será el mismo que dé el producto.

Sin embargo, no siempre que se verifique la prueba será cierta la operacion.

En efecto, supongamos efectuado el producto de dos números, que la operacion esté bien, y que la prueba quede satisfecha: es evidente que si cambiamos de lugar las cifras del multiplicando, multiplicador ó producto, la prueba quedará todavía satisfecha, miéntras que la operacion estaria muy mal; es decir, que el número que se considera como producto será muy diferente del que darian los factores propuestos; luego si puede estar la prueba satisfecha y sin embargo la operacion estar mal efectuada, no debemos tomar la prueba como tal.

LECCION XI.

Máximo comun divisor de dos números. — Máximo comun divisor de varios números. — Observaciones.

Máximo comun divisor de dos números.

104. Llámase en general *máximo comun divisor* de dos ó más números, el mayor número que los divide á todos.

La investigacion del máximo comun divisor de dos números está fundada en los dos principios siguientes:

1.° *Todo número que divide á otro, es el máximo comun divisor de los dos.*

Sean A y B dos números de los cuales uno de ellos, B, por ejemplo, divide al otro.

El *m . c . d* . de A y B no puede ser mayor que B, puesto que tiene que dividirle; luego si B divide al número A, como tambien se divide á sí mismo, B será el máximo comun divisor de los dos números.

2.° *Si la division de un número por otro no es exacta, el* m . c . d . *de los dos números es igual al del menor y el resto de la division.*

Sea A el número mayor, B el menor y R el resto de la division.

Representemos por D el *m . c . d .* de A y B, por D′ el de B y R, y vamos á demostrar que D es igual á D′.

Por ser D un divisor de A y B, lo es tambien del resto R (79, *cons.*); luego es un divisor comun de B y R; pero el mayor divisor comun de B y R es D′, luego D $\ngtr$ D′. Veamos si puede ser menor.

D′ es un divisor comun de B y R; luego lo será tambien de A (79, *obser.*), y por consiguiente es factor ó divisor comun de A y B: pero el mayor comun divisor de A y B es D; luego D′ $\ngtr$ D, ó lo que es igual D $\nless$ D′.

Ahora bien, si D no puede ser mayor ni menor que D′, tendrá que ser D igual á D′, segun queriamos demostrar.

105. Probados estos dos principios, pasemos á la investigacion del *m . c . d .* de dos números que representaremos por A y B.

Dividamos el mayor por el menor, y si la division es exacta, el menor, que supondremos sea B, será, segun el primer principio, el máximo comun divisor buscado.

Si la division no es exacta, dará un cierto resto R, y el *m . c . d .* de A y B será igual, segun el principio segundo, al de B y R.

Dividamos ahora B por R, y si la division es exacta, R será el *m . c . d .* buscado; pero si no lo es, dará un segundo resto R′, y se tendrá que el *m . c . d .* de B y R será el mismo que el de R y R′.

Continuando del mismo modo dividiendo R por R′, R′ por R″, R″ por R‴, etc., llegaremos necesariamente á un cierto resto que dividirá al anterior, en cuyo caso este último resto será el *m . c . d .* de los dos números dados.

Que llegaremos á un resto que divida al anterior, es indudable; porque siendo todos enteros y decrecientes, se ha de llegar necesariamente despues de un número limitado de divisiones á una cuyo resto sea cero; pues de lo contrario habria un número infinito de números enteros menores que B y mayores que *cero*, lo cual es un absurdo.

De todo lo dicho anteriormente se deduce la regla general que:

106. *Para hallar el máximo comun divisor de dos números se divide el mayor por el menor; si el resto de esta division es cero, el menor de los dos números será el* m . c . d . *pedido. Si dicho resto no es cero, se divide el menor por este primer resto, y si el de la nueva division es cero, el anterior será el* m . c . d . *buscado. Si tampôco fuese cero, se divide el primer resto por el segundo, y se continúa del mismo modo hasta llegar á un resto cero, en cuyo caso el anterior será el* m . c . d . *buscado.*

Sea, por ejemplo, hallar el *m . c . d .* de los números 5808 y 3984.

Dispondremos la operacion del modo siguiente:

5808	3984	1824	336	144	48
	1	2	5	2	3
1824	336	144	48	0	

Dividamos 5808 por 3984, y hallaremos 1 por cociente y 1824 por resto; de donde deduciremos que 3984 no es el *m . c . d .* buscado, pero que lo será el de los números 3984 y 1824. Dividamos 3984 por 1824, y obtendremos el cociente 2 y el resto 336; por tanto el *m . c . d .* buscado no es 1824, y sí lo será el de los números 1824 y 336. Dividamos, pues, 1824 por 336, y encontraremos el cociente 5 y el resto 144, de donde concluiremos que el *m . c . d .* que se busca es igual al de los números 336 y 144. Dividamos 336 por 144, y hallaremos el cociente 2 y el resto 48; dividamos finalmente 144 por 48, y hallaremos el cociente 3 y el resto *cero*, de donde se deducirá que 48 es el máximo comun divisor de los dos números propuestos.

Máximo comun divisor de varios números.

107. *Todo número que divide á otros dos, divide tambien á su máximo comun divisor.*

En efecto, todo número *n* que divide á otros dos, divide tambien al resto de la division (79, *cons.*). Dividiendo *n* al número menor y al primer resto, divide, segun el mismo principio, al segundo resto. Del mismo modo se veria que *n* divide á todos los demas restos; pero el último es el $m.c.d.$, luego éste es divisible por el número n, segun queriamos demostrar.

108. *El máximo comun divisor de varios números es el mismo que el del* m.c.d. *de dos cualesquiera de ellos y todos los demas.*

Sean A, B, C, D ... varios números cuyo $m.c.d.$ llamaremos M; sea M′ el $m.c.d.$ de A y B; finalmente, sea M_1 el $m.c.d.$ de M′, C, D ... y vamos á demostrar que M es igual á M_1.

En efecto, el número M, siendo el $m.c.d.$ de los números propuestos, divide en particular á los números A y B, y por tanto á su $m.c.d.$ M′, de modo que M es un divisor comun de M′, C, D...; pero el mayor comun divisor de estos números es M_1; luego $M \not> M_1$. Veamos si puede ser menor.

Por ser M_1 el $m.c.d.$ de M′, C, D ... divide en particular á M′, y por consiguiente á sus múltiplos A y B, de donde se deduce que M_1 es un comun divisor de los números A, B, C, D...; pero el mayor comun divisor de estos números es M, luego $M_1 \not> M$, ó lo que es lo mismo $M \not< M_1$. Ahora bien, si M no puede ser mayor ni menor que M_1, tendrá que ser M igual á M_1, segun queriamos demostrar.

La investigacion del máximo comun divisor de n números queda reducida, segun el principio anterior, á la de $n - 1$ números, ésta á la de $n - 2$, y así sucesivamente hasta llegar á la investigacion del $m.c.d.$ de dos números.

Así, por ejemplo, si quisiéramos hallar el $m.c.d.$ de los cuatro números

A, B, C, D,

principiaremos por buscar el de dos de ellos A y B, el cual supondrémos sea M, y la cuestion queda reducida á determinar el $m.c.d.$ de los tres números

M, C, D.

Busquemos el $m.c.d.$ de M y C, el cual supondremos sea M′, y por tanto el máximo comun divisor de M, C, D será el mismo que el de M′ y D.

Hallando el $m.c.d.$ de M′ y D, y representándole por M″, éste será el de los números propuestos.

De todo lo dicho anteriormente se deduce la regla general que:

109. *Para hallar el máximo comun divisor de varios números, se principia por buscar el de dos de éstos, despues se determina el del número hallado y otro de los propuestos, y así se continúa hasta haber empleado todos los números. El último máximo comun divisor hallado será el de los números propuestos.*

Sea, por ejemplo, hallar el *m . c . d .* de los cuatro números

2860, 2730, 1365, 468.

Principiemos por buscar el *m . c . d .* de los dos números 2860 y 2730, y hallaremos el número 130; por tanto la cuestion queda reducida á determinar el *m . c . d .* de los tres números

130, 1365, 468.

El *m . c . d .* de 130 y 1365 es 65; por consiguiente el de los tres números anteriores es el mismo que el de los números 65 y 468. El *m . c . d .* de estos números es 13, luego 13 será el *m . c . d .* de los números propuestos.

Cuando dos ó más números no tienen más divisor comun que la unidad, se dice que son *primos entre sí;* así los números 8 y 9 son primos entre sí, lo mismo que los números 6, 13 y 16. Cuando son más de dos los números que se consideran puede suceder que un factor, sin ser comun á todos, lo sea á dos ó más, por cuya razon en vez de decir que dichos números son *primos entre sí*, se dirá que no tienen más factor comun que la unidad.

Observaciones.

Primera observacion. Si al hallar el máximo comun divisor de dos números se llegan á obtener dos restos consecutivos primos entre sí, no se debe continuar la serie de operaciones; porque los números propuestos son primos entre sí tambien, puesto que su *m . c . d .* es igual al de dos restos consecutivos. Del mismo modo, si en el *m . c . d .* de varios números hallamos que dos, cualesquiera de los que en este procedimiento se consideran, son primos entre sí, no debemos continuar los cálculos, porque los números propuestos no tendrán más comun divisor que la unidad.

2.ª Al hallar el *m . c . d .* de varios números, se debe siempre principiar por buscar el de los dos más pequeños, porque los cálculos son más breves.

3.ª *Si un número divide á varios, divide tambien al* m.c.d. *de todos.*

Porque dividiendo á los dos primeros números, divide, segun lo demostrado (107), á su *m . c . d .* M; dividiendo á M y al tercer número, dividirá á su *m . c . d .* M′, y así sucesivamente hasta llegar al último *m . c . d .*, que es el de todos.

4.ª El 2.º principio demostrado en el número 104 no exige que la division esté hecha por defecto: se verifica igualmente aunque lo esté por exceso, y se demuestra de la misma manera; por lo tanto, las divisiones que hay que hacer en la investigacion del *m . c . d .* pueden practicarse por exceso ó defecto, con el objeto de que el resto no sea mayor que la mitad del divisor, consiguiendo de este modo que el número de estas divisiones sea el más pequeño posible.

Así, por ejemplo, si aplicásemos á los dos números 34566 y 5838 el procedimiento ordinario del *m . c . d .*, tendriamos que hacer siete divisiones para hallar el *m . c . d .* 42; mas por este método abreviado sólo tenemos que hacer cuatro, segun se ve:

34566	5838	462	168	42
	5	12	2	4
5376	1218	126	0	
	294			

Para hacer esta abreviacion no hay más que seguir el método ordinario, y cuando se tenga un resto que sea mayor que la mitad del divisor, se pone por divisor de la division siguiente el resto complementario. Así, la primera division de este ejemplo ha dado la resta 5376, que es mayor que la mitad del divisor, por lo que en vez de poner como divisor dicho resto, hemos puesto su complementario 462. Lo mismo se ha hecho en las demas divisiones, obteniendo de este modo el *m . c . d .* de los dos números dados con tres operaciones ménos que por el método ordinario.

LECCION XII.

Principios relativos al máximo comun divisor. — Límite del número de divisiones que hay que practicar en la investigacion del *m . c . d .* de dos números.

Principios relativos al máximo comun divisor.

110. *Si se multiplican dos ó más números por otro cualquiera, el* m . c . d . *viene multiplicado por este otro.*

Supongamos en primer lugar que sólo sean dos los números A y B, y que su *m . c . d .* sea D.

Si multiplicamos A y B por el número *n*, el primer resto R vendrá multiplicado por *n*, el segundo R′ tambien quedará multiplicado por *n*, y del mismo modo veriamos que todos los demas vienen multiplicados por el mismo número: luego el último, y por consiguiente el *m . c . d .*, queda multiplicado por *n*.

Sean en segundo lugar varios números A, B, C, D ...., cuyo *m . c . d .* representaremos por M_1.

Multiplicando todos estos números por *n*, quedan multiplicados en particular los números A y B, y por tanto su *m . c . d .* M. Multiplicados por *n* los números M y C, su *m . c . d .* M′ tambien queda multiplicado. Del mismo modo habiéndose multiplicado los números M′ y D por *n*, su *m . c . d .* tambien lo estará. Continuando del mismo modo se veria que el último *m . c . d .* ó sea M_1 que es de los números propuestos, viene tambien multiplicado por *n* segun queriamos demostrar.

111. *Si se dividen dos ó más números por otro cualquiera, el* m . c . d . *vendrá dividido tambien por este número.*

Supongamos en primer lugar que sólo sean dos los números A y B, y que ámbos se han dividido por uno de sus factores *n*. Habiendo dividido A y B por *n*, el resto de la division R vendrá dividido tambien por *n* (79, *cons.*); habiendo dividido á B y R por *n*, el resto siguiente R′ tambien vendrá dividido; y del mismo modo demostrariamos que tambien quedarán divididos todos los restos siguientes hallados en el procedimiento del *m . c . d .*; pero el último resto es dicho *m . c . d .*; luego éste queda dividido por el número *n*, segun queriamos demostrar.

Si son varios los números, A, B, C, D... tendremos que, por haber dividido por n á los números A y B, el *m . c . d .* M de ellos viene dividido, segun el primer caso, por el mismo número n; por haber dividido al tercer número C y M, aparece tambien dividido por n el *m . c . d .* de C y M, que es M′; divididos M′ y D, queda dividido su *m . c . d .* M″, y por consiguiente el *m . c . d .* de A, B, C y D, y así sucesivamente: luego dividiendo varios números A, B, C, D... por un número n, el *m . c . d .* de todos ellos queda tambien dividido por el mismo número.

112. Del principio anterior se deduce *que si se dividen varios números por su* m . c . d ., *los cocientes que resultan no tienen más factor comun que la unidad.*

En efecto, al dividir los números dados por su *m . c . d .*, el *m . c . d .* de los cocientes es el cociente que resulta de dividir el de los números dados por él mismo, y por consiguiente la unidad.

Recíprocamente: *si se dividen dos ó más números por un divisor comun á todos, y los cocientes que resultan tienen por* m . c . d . *la unidad, el divisor por el cual se dividieron, es el mayor que divide á los números dados.*

Sean, en efecto, A, B, C, D los números que divididos por M dan los cocientes A′, B′, C′, D′ que tienen por *m . c . d .* la unidad. Si multiplicamos dichos cocientes por M, resultarán otra vez los números propuestos, y el *m . c . d .* será el de los cocientes, que es 1, multiplicado por el número M (110), es decir, $1 \times M = M$.

113. *Todo número que divide al producto de dos factores y es primo con uno de ellos, divide necesariamente al otro.*

Sea el producto $A \times B$ y un número P que le divide, siendo primo con uno de los factores A, por ejemplo, y vamos á demostrar que tiene que dividir á B.

En efecto, por ser A y P dos números primos entre sí, su *m . c . d .* será la unidad, y multiplicando dichos dos números por B tendremos los productos AB y PB, cuyo *m . c . d .* será, segun el principio anterior, $1 \times B = B$.

Ahora bien, AB es divisible por hipótesis por P; PB evidentemente lo es tambien; luego su *m . c . d .* tambien será divisible por n.

114. Fundado en lo dicho anteriormente (112), puede ha-

cerse una abreviacion en el método ordinario. En efecto, si los números propuestos tienen algun factor comun, podremos dividirles por él, sabiendo que el *m . c . d .* vendrá dividido por dicho factor comun; luego hallando el *m . c . d .* de los cocientes, que indudablemente será más sencillo, y multiplicando dicho *m . c . d .* por el número por que se dividieron los propuestos, se tendrá el *m . c . d .* pedido.

Límite del número de divisiones que hay que practicar en la investigacion del m . c . d.. de dos números.

115. En la investigacion del límite del número de divisiones que hay que hacer para hallar el *m . c . d .*, debemos distinguir dos casos: 1.°, *que las divisiones se hagan por el método ordinario;* y 2.°, *que se practiquen por exceso ó defecto, segun convenga para que el resto hallado no sea mayor que la mitad del anterior.*

Primer caso. *Un límite del número de divisiones que hay que hacer para hallar el* m . c . d . *segun el método ordinario, es igual al doble del exponente de la potencia de 2 inmediatamente superior al menor de los dos números dados.*

Este principio está fundado en los dos lemas siguientes:

1.° *Todo dividendo mayor que el divisor, es mayor que el doble del resto de la division.*

En efecto, sea A un dividendo, B el divisor que se supone menor que A, Q el cociente, y R el resto; tendremos

$$A = BQ + R.$$

Siendo $A > B$, el cociente Q es por lo ménos la unidad: luego

$$A \geqq B + R;$$

y como $B > R$, se tendrá

$$A > R + R = 2R.$$

2.° *Si al hallar el* m . c . d . *de dos números se ejecutan más de* 2n *divisiones, el menor de los dos números será mayor que* 2^n.

En efecto, llamemos R, R′, R″, R‴... $R^{(2n)}$ á los restos respectivos de cada una de las divisiones; se tendrá, segun el lema anterior, suponiendo $B < A$,

$$B > 2R', \quad R' > 2R''', \quad R''' > 2R^{v} \ldots \quad R^{(2n-3)} > R^{(2n-1)};$$

de modo que poniendo en vez de R' la cantidad $2R'''$ en la primera desigualdad, se tendrá con más razon

$$B > 2 \times 2R''' = 2^2R'''.$$

Si en esta desigualdad ponemos en vez de R''' la cantidad $2R^{v}$ menor que R''', resultará tambien

$$B > 2^2 \times 2R^{v} = 2^3 \times R^{v},$$

y continuando así hasta la última desigualdad, tendremos

$$B > 2^n \times R^{(2n-1)};$$

y como por hipótesis se pueden hacer más de $2n$ divisiones, $R^{(2n-1)}$ no es el último resto; y no siendo el último resto, es mayor que la unidad: luego con más razon será

$$B > 2^n.$$

Demostrados estos dos lemas, pasemos á hallar el límite del número de divisiones.

Sean A y B los números cuyo *m . c . d .* queremos hallar; supongamos $B < A$, y que $B < 2^n$, siendo 2^n la potencia inmediata superior á B; es decir, que $2^{n-1} < B$.

Siendo $B <$ ó $= 2^n$, el número de divisiones que puede hacerse es menor que $2n$, ó á lo más igual, pero mayor nunca; porque si el número de divisiones ejecutadas fuese mayor que $2n$, segun el lema anterior, B seria mayor que 2^n, lo que es contra el supuesto: luego un *límite del número de divisiones que hay que ejecutar en la investigacion del* m . c . d . *por el método ordinario es igual al doble del exponente de la potencia de 2 inmediatamente superior al menor de los dos números.*

SEGUNDO CASO. *Un límite del número de divisiones que hay que practicar en la investigacion del* m . c . d . *segun el método abreviado es igual al triplo del número de cifras que tiene el menor de los dos números dados.*

Para demostrar este principio hay que anteponer el siguiente lema:

Un resto cualquiera R *de los obtenidos por el método abreviado en la investigacion del* m . c . d ., *es mayor que* 10 *veces el resto* R''' *que está tres lugares despues.*

En efecto, siendo por hipótesis el resto R mayor que el doble del siguiente R', se tendrá, si la division está efectuada por defecto,

$$R = ó > 2R' + R'';$$

porque el cociente de dividir R por R' es, por lo ménos, 2.

Si la division está hecha por exceso, se tendrá

$$R = ó > 3R' - R'',$$

ó bien
$$R = ó > 2R' + R' - R'';$$

pero siendo $R' > 2R''$, tendremos, poniendo en vez de R' una cantidad 2R'' menor que R',

$$R > 2R' + 2R'' - R'' = 2R' + R'';$$

luego ya esté la division hecha por defecto ó por exceso, siempre se tiene que

$$R = ó > 2R' + R''.$$

Ahora bien, siendo $R' \geq 2R''$, si ponemos en vez de R' la cantidad 2R'', que es menor, tendremos

$$R > 2 \times 2R'' + R'' \text{ ó } R > 5R'';$$

y como tambien se verifica que $R'' > 2R'''$, con mayor razon se tendrá

$$R > 10R''',$$

segun queriamos demostrar.

Probado este lema, pasemos á demostrar el principio, y sean A y B los dos números cuyo máximo comun divisor es d. Esto supuesto, si principiamos á contar desde el último resto que es d, el que está tres lugares despues será, segun el lema anterior, mayor que $10d$; luego el resto, que á contar desde el último ocupe el lugar $(1 + 3)$, será mayor que $10d$,

el que ocupe el lugar $(1 + 3 + 3) = (1 + 2 \times 3)$ será $> 10^2 d$,

el que ocupe el lugar $(1 + 2\times3 + 3) = (1 + 3\times3)$ será $> 10^3 d$,

el que ocupe el lugar $(1 + 3\times3 + 3) = (1 + 4\times3)$ será $> 10^4 d$,

y en general el que ocupe el lugar $(1 + n \times 3)$ será $> 10^n d$.

Si este resto, es decir, el que ocupa á partir del último el lugar $(1+3n)$, se toma por el primer divisor B, el número $(1+3n)$ nos indica el número de restos, y por lo tanto el número de divisiones efectuadas; *luego para que haya un número de divisiones mayor que* 3n, *es necesario que* B *sea mayor que* 10^nd, *y con más razon mayor que* 10^n, *pues* d *es, por lo ménos, igual á la unidad. Por consiguiente, si ha de haber más de* 3n *divisiones en el procedimiento del* m . c . d . *por el método abreviado, es necesario que el menor de los dos números* B *tenga más de* n *cifras; de donde se deduce que si este número menor* B *no pasa de* n *cifras, el número de divisiones que hay que ejecutar no excederá á* 3n, *es decir, al triplo del número de cifras que tiene el menor de los dos números dados, segun queríamos demostrar.*

LECCION XIII.

Mínimo comun múltiplo de dos números. — Mínimo comun múltiplo de varios números. — Principios relativos al mínimo comun múltiplo.

Mínimo comun múltiplo de dos números.

116. Llámase en general *mínimo comun múltiplo* de dos ó más números el menor número divisible por todos ellos.

117. *Todo comun múltiplo de dos números es igual al producto que resulta de multiplicar los cocientes de dividir estos números por su* m . c . d ., *el máximo comun divisor y un número entero cualquiera.*

Siendo A′ y B′ los cocientes de dividir los números dados A y B por su máximo comun divisor D, se tendrá

$$A = DA' \quad y \quad B = DB' \qquad [1].$$

Todo comun múltiplo de A y B se obtendrá multiplicando uno de ellos A por un número entero m, que cumpla con la condicion de que el producto sea un múltiplo del otro número B; de modo que se deberá tener

$$Am = BQ \qquad [2],$$

siendo Q un número entero.

Poniendo en esta igualdad los valores de A y B [1], se tendrá

$$DA'm = DB'Q,$$

y dividiendo por D y luégo por A'; se hallará

$$m = \frac{B'Q}{A'} \quad [3],$$

y como m es un número entero, A' tiene que dividir á B'Q, pero A' y B' son primos entre sí (114); luego A' tiene que dividir á Q, ó lo que es lo mismo, Q tiene que ser un múltiplo de A'; de modo que haciendo $Q = nA'$ en la igualdad [3], tendremos

$$m = \frac{B'nA'}{A'} = B'n;$$

finalmente, poniendo este valor en la iguadad [2], se tendrá

$$AB'n = BQ = A'B'Dn.$$

Donde claramente se ve que el producto $A'B'Dn$, formado de los cocientes A' y B' de dividir los números dados A y B por su máximo comun divisor D, de este $m . c . d .$ y del número entero pero arbitrario n, es la expresion de los comunes múltiplos de los números A y B.

Recíprocamente. El producto $A'B'Dn$ es un comun múltiplo de los números A y B. En efecto, como el órden de factores no altera el producto, se tiene

$$A'B'Dn = A'D \times B'n = B'D \times A'n = A \times B'n = B \times A'n.$$

Donde vemos que $A'B'Dn$ es un múltiplo de A y de B.

De todos estos comunes múltiplos de A y B, el menor de ellos es aquel que corresponde al valor particular de $n = 1$, de modo que el mínimo comun múltiplo de dos números A y B, será

$$A'B'D = AB' = BA',$$

es decir, el mínimo comun múltiplo de dos números es igual al producto de su $m . c . d .$ por los cocientes de dividir dichos números por este $m . c . d .$; ó si se quiere, tambien es igual, segun manifiesta la expresion anterior, al producto de uno de ellos por el cociente que resulta de dividir el otro por el $m . c . d .$ de entrámbos.

De todo lo dicho anteriormente se deduce la regla general que:

118. *Para hallar el mínimo comun múltiplo de dos números se multiplica uno de ellos por el cociente que resulta de dividir el otro por el máximo comun divisor de ámbos.*

Del principio anterior se deduce que:

1.° *Si dos números* A *y* B *son primos entre sí, su mínimo comun múltiplo será igual al producto de estos números.*

2.° *Los comunes múltiplos de dos números* A *y* B, *son múltiplos de su mínimo comun múltiplo.*

EJEMPLO. Hallar el mínimo comun múltiplo de los números 5952 y 3984.

El *m . c . d .* de estos números es 48; el cociente de dividir por 48 uno de los números, el primero por ejemplo, es 124; el *m . c . m .* es por lo tanto

$$124 \times 3984 = 494016.$$

Mínimo comun múltiplo de varios números.

119. *El mínimo comun múltiplo de varios números es el mismo que el del* m . c . m . *de dos de ellos y todos los demas.*

Sean A, B, C, D... varios números cuyo *m . c . m .* llamaremos M; sea M′ el *m . c . m .* de A y B; finalmente sea M_1 el *m . c . m .* de M′, C, D... y vamos á demostrar que M es igual á M_1.

En efecto, el número M siendo el *m . c . m .* de los números propuestos, es un múltiplo comun en particular de los números A y B, y por tanto, segun lo dicho anteriormente, será un múltiplo de su *m . c . m .* M′, de modo que M es un comun múltiplo de los números M′, C, D...; pero el menor comun múltiplo de estos números es M_1, luego $M \nless M_1$. Veamos si puede ser mayor.

Por ser M_1 el *m . c . m .* de M′, C, D ... es un múltiplo en particular de M′, y por tanto de A B que son divisores suyos, de donde se deduce que M_1 es un comun múltiplo de los números A, B, C, D ...; pero el menor comun múltiplo de estos números es M, luego $M_1 \nless M$, ó lo que es lo mismo $M \ngtr M_1$.

Ahora bien, si M no puede ser menor ni mayor que M_1 tendrá que ser M igual á M_1 segun queriamos demostrar.

La investigacion del *m . c . m .* de n números, queda reducida, segun el principio anterior, á la de $n - 1$ números, ésta á la de $n - 2$, y así sucesivamente hasta llegar á la investigacion del mínimo comun múltiplo de dos números.

Por ejemplo, si quisiéramos hallar el *m . c . m .* de los cuatro números

A, B, C, D,

principiaríamos por buscar el de dos de ellos A y B, el cual supondremos sea M, y la cuestion queda reducida á determinar el *m . c . m .* de los tres números

M, C, D.

Busquemos el *m . c . m .* de M y C, y suponiendo sea M′, se tendrá reducida la cuestion finalmente á buscar el *m . c . m .* de los dos números

M′ y D,

cuyo *m . c . m .* que llamaremos M″, será el de los números dados.

De aquí se deducirá la regla general siguiente:

120. *Para hallar el mínimo comun múltiplo de varios números, se principia por buscar el de dos de éstos, despues se determina el del número hallado y otro de los dados, y así se continúa hasta haber empleado todos los números; el último mínimo comun múltiplo hallado será el de los números propuestos.*

Sea, por ejemplo, hallar el *m . c . m .* de los números

120, 240, 360 y 64.

Principiemos por buscar el *m . c . m .* de los dos números 120 y 240, y hallaremos el número 240; por tanto la cuestion queda reducida á determinar el *m . c . m .* de los tres números

240, 360 y 64.

El *m . c . m .* de 240 y 360 es 720; por consiguiente el de los tres números anteriores es el mismo que el de los dos números 720 y 64. El *m . c . m .* de estos números es 11520; luego 11520 será el *m . c . m .* de los números propuestos.

OBSERVACIONES. 1.ª En la práctica se debe principiar por buscar el de los dos números mayores, porque á veces el de éstos suele ser el de todos.

2.ª *Los múltiplos comunes de varios números son múltiplos del mínimo comun múltiplo.* Porque siendo múltiplos comunes á todos, lo son de los dos primeros y por consiguiente de su *m . c . m .* M; siendo comun múltiplo de M y de todos los demas, lo es de M y del tercer número, y por tanto de su *m . c . m .* M'; del mismo modo veriamos que era de los números M'', M''', ... y por consiguiente del último que es el *m . c . m .* de todos los números.

Principios relativos al mínimo comun múltiplo.

121. *Si dos ó más números se multiplican por otro cualquiera, el* m . c . m . *viene multiplicado por este número.*

En efecto, sean A y B los números, y $M = AB'$ su *m . c . m .*: multiplicando A y B por n, resultarán los números An y Bn; el *m . c . d .* será (110) Dn, y B' el cociente de la division del segundo por dicho *m . c . d .*; de modo que el nuevo *m . c . m .* será $A . n . B' = AB' . n = Mn$: donde vemos que el *m . c . m .* es el producto de M por el número n, segun queriamos demostrar.

Si los números fuesen más de dos, el principio seria igualmente cierto: En efecto, al multiplicar todos los números por n, el *m . c . m .* M de los dos primeros vendrá, segun lo demostrado anteriormente, multiplicado por n. El *m . c . m .* M' de M y otro número cualquiera, vendrá tambien multiplicado por n, y lo mismo le sucederá á los demas números M'', M''' ... incluso el último de estos números que es el *m . c . m .* de todos.

122. *Si se dividen dos ó más números por otro cualquiera, el* m . c . m . *vendrá dividido tambien por este número.*

Supongamos en primer lugar que sólo sean dos los números A y B, y que ámbos se hayan dividido por n.

Habiéndose dividido A y B por n, su máximo comun divisor D vendrá dividido tambien por n (111), de modo que llamando A' B' y D' los cocientes respectivos, se tendrá

$$\frac{A}{D} = \frac{A'}{D'} = A'', \frac{B}{D} = \frac{B'}{D'} = B''.$$

El mínimo comun múltiplo de los números A y B es (118)

$$M = A \times \frac{B}{D} = A \times B'' = A'n \times B'' = A'B''n.$$

El mínimo comun múltiplo de los cocientes A′ y B′ será, segun la misma regla,

$$M' = A' \times \frac{B'}{D'} = A' \times B'';$$

luego se tendrá finalmente la igualdad

$$M = M' \times n \text{ de donde } M' = \frac{M}{n},$$

que justifica el enunciado del principio.

Si son varios los números A, B, C, D ... tendremos, que habiendo sido divididos por n los números A y B, su $m.c.m.$ M vendrá dividido tambien por n segun el primer caso; apareciendo divididos M y C por n, su $m.c.m.$ M′ viene tambien dividido por n; lo mismo se veria que los números M″, M‴ ... vienen igualmente divididos por el mismo número n; pero el último de estos números es el $m.c.m.$ de los propuestos; luego si se dividen varios números por otro cualquiera n, su $m.c.m.$ viene tambien dividido por n.

123. *Si se divide el mínimo comun múltiplo de varios números por cada uno de éstos, los cocientes son primos entre sí; ó mejor dicho, no tienen más factor comun que la unidad.*

Sean, en primer lugar, dos números A y B, y M su $m.c.m.$ Sabemos que llamando A′ y B′ á los cocientes de la division de A y B por su $m.c.d.$ D, se tiene (118)

$$M = A'DB'.$$

Ahora bien, dividiendo M por $A = A'D$, da de cociente B′, y dividiendo por $B = B'D$, da de cociente A′; y como A′ y B′ son primos entre sí (112), el principio queda demostrado.

Sean, en segundo lugar, varios números A, B, C, D. Si llamamos M al $m.c.m.$ y A′, B′, C′ y D′ los cocientes de la division de M por cada uno de los números A, B, C y D, se tendrá

$$M = AA' \quad M = BB' \quad M = CC' \quad M = DD' \qquad [1].$$

Si suponemos que A′, B′, C′ y D′ tienen un factor comun n distinto de la unidad, representando por A″, B″, C″ y D″, los cocientes de dividir A′, B′, C′ y D′ por n, se tendrá

$$A' = nA'', \quad B' = nB'', \quad C' = nC'', \quad D' = nD'';$$

y sustituyendo estos valores en las igualdades [1], tendremos

$$M = AnA'' \quad M = BnB'' \quad M = CnC'' \quad M = DnD'';$$

y dividiendo por n, será

$$\frac{M}{n} = AA'', \ \frac{M}{n} = BB'', \frac{M}{n} = CC'', \ \frac{M}{n} = DD''.$$

Siendo enteros los segundos miembros de estas igualdades, los primeros tambien lo serán, y por consiguiente $\frac{M}{n}$ expresa un número entero, que podremos representar por M′ siendo $M' < M$, puesto que $n > 1$. De aquí se deduce que M′ es un múltiplo comun de los números A, B, C y D, y menor que M, lo cual es contra la hipótesis, porque M es por el supuesto el *m.c.m.*; luego los cocientes que resultan de dividir el *m.c.m.* de varios números por cada uno de estos números, no pueden tener ningun factor comun distinto de la unidad.

124. Recíprocamente. *Si los cocientes de dividir un número cualquiera* M *por otros varios números son primos entre sí ó no tienen más divisor comun que la unidad,* M *será el mínimo comun múltiplo de dichos números.*

Sea M un número que dividido sucesivamente por A, B, C, D ... da los cocientes A′, B′, C′, D′ ... que son primos entre sí, y vamos á demostrar que M es el *m.c.m.* de los números A, B, C, D...

En efecto, por suposicion se tiene la serie de igualdades

$$\frac{M}{A} = A', \quad \frac{M}{B} = B', \quad \frac{M}{C} = C', \quad \frac{M}{D} = D' \ldots \qquad [1]$$

siendo A′, B′, C′, D′ ... números que no tienen más factor comun que la unidad.

Ahora bien, si M no es el *m.c.m.* de los números dados, será un múltiplo del $m.c.m.$ (120, *obser.* 2.ª) de modo que se tendrá, llamando M′ al $m.c.m.$ de los números A, B, C, D ...

$$M = M' \times n,$$

siendo n un número entero.

Dividiendo ahora por n las igualdades [1], se hallará

$$\frac{M'}{A} = \frac{A'}{n}, \quad \frac{M'}{B} = \frac{B'}{n}, \quad \frac{M'}{C} = \frac{C'}{n}, \quad \frac{M'}{D} = \frac{D'}{n} \ldots$$

y como M′ es un comun múltiplo de los números A, B, C, D ... los cocientes $\frac{A'}{n}, \frac{B'}{n}, \frac{C'}{n}, \frac{D'}{n} \ldots$ tienen que ser enteros, lo que prueba que n es un comun divisor de los números A′, B′, C′, D′ ... lo cual es contra la hipótesis; luego no puede suponerse que el mínimo comun múltiplo sea M′, número menor que M, y por tanto, siendo M un múltiplo de los números dados, y no habiendo otro menor que cumpla con esta condicion, se sigue que, segun queriamos demostrar, M es el mínimo comun múltiplo de todos ellos.

LECCION XIV.

Números primos. — Investigacion de los mismos hasta un límite dado por la criba de Eratóstenes. — Principios relativos á los números primos.

NUMEROS PRIMOS.

Investigacion de los mismos hasta un límite dado por la criba de Eratóstenes.

125. *Se llama número primo el que no es divisible más que por sí mismo y por la unidad.*

Es necesario no confundir lo que son *números primos* con *números primos entre sí*. Pueden ser dos números primos entre sí, y sin embargo no ser primos; como sucede por ejemplo con 8 y 9, que á pesar de no ser ninguno primo, son primos entre sí, puesto que no tienen más factor comun que la unidad.

126. *Todo número primo que no divide á otro número, es primo con él.*

En efecto, el único factor comun distinto de la unidad, que podian tener ámbos, era el número primo, y éste no lo es; luego son primos entre sí.

127. *Todo número es siempre divisible por un número primo distinto de la unidad.*

Sea el número N que podrá ser ó no primo; en el primer caso, como N es divisible por sí mismo, el principio queda demostrado.

Si N no es primo, se podrá dividir por un factor N′ menor que N y mayor que la unidad, de modo que se tendrá

$$N = N'Q.$$

Ahora podrá suceder una de dos cosas: que N′ sea primo ó no lo sea; si es primo, el principio está demostrado; si no lo es, será divisible por otro número N″ menor que N′ y mayor que la unidad, lo cual dará

$$N' = N''Q'.$$

Si N″ es número primo, por dividir á N′, dividirá á su múltiplo N, y por lo tanto el principio queda demostrado: si N″ no es primo, será divisible por otro número N‴ menor que N″. Continuando así, llegaremos á un número primo mayor que la unidad que le dividirá exactamente; porque si no llegásemos á este número primo, resultaria un número infinito de factores enteros mayores que la unidad y menores que N, lo cual es absurdo, puesto que números menores que N no hay más que $N - 1$; luego todo número N tiene por lo ménos un factor primo distinto de la unidad.

128. Para hallar los números primos que hay desde 1 hasta un cierto límite L por medio del procedimiento conocido con el nombre de CRIBA-ERATOSTÉNICA, *se principia por escribir los números* 1, 2, *y la serie natural de los números impares* 3, 5, 7 ... *hasta* L; *en seguida se van tachando de* 3 *en* 3 *á partir del número* $3 \times 3 = 9$ *inclusive; despues de* 5 *en* 5 *á partir del número* $5 \times 5 = 25$; *luego de* 7 *en* 7 *á partir de* $7 \times 7 = 49$, *y así sucesivamente se van tachando de* 11 *en* 11, *de* 13 *en*

13, *de* 17 *en* 17, *etc., hasta de* n *en* n, *en cuyo caso, si el número primo inmediatamente superior á* n *suponemos sea* p, *podremos asegurar que serán primos todos los números que hayan quedado por tachar hasta el número* $p \times p = p^2$.

Ante todo podemos ver que no habiendo considerado más número par que el 2, la serie de números que hemos escrito no contiene los múltiplos de 2. Despues podemos observar que los números que á partir de 3 ó un múltiplo suyo se hallan ocupando los lugares de 3 en 3, serán los múltiplos de 3, pues uno cualquiera se obtendrá añadiendo al anterior la suma $2 + 2 + 2 = 2 \times 3$. Del mismo modo los números que á partir del 5 ó un múltiplo suyo ocupen los lugares de 5 en 5, serán múltiplos de 5, y en general los números que á partir de n ó de un múltiplo suyo ocupen los lugares de n en n, serán los múltiplos de este número, pues uno cualquiera se obtendrá añadiendo al anterior la suma $2 + 2 + 2 + \ldots = 2 \times n$, y si el número del cual se parte es n ó un múltiplo suyo, agregándole otro múltiplo como es $2n$, el resultado tambien lo será.

Ahora bien, al tachar los números de 3 en 3 principiando desde el 9 inclusive, se destruyen todos los múltiplos de 3 mayores que 9, y como los menores que 9 han de ser múltiplos de 2, y éstos se han suprimido, se sigue que han desaparecido todos los múltiplos de 3. Del mismo modo, al tachar los números de 5 en 5 á partir del 25, quedan suprimidos los múltiplos de 5 mayores que 25; los menores que 25 tienen que ser múltiplos de 2 ó de 3, y como todos los múltiplos de éstos se han destruido ya, quedan por lo tanto suprimidos todos los múltiplos de 5. En general, tachando de n en n los números de la serie á partir del número $n \times n = n^2$, hemos suprimido todos los múltiplos de n mayores que n^2. Cualquier múltiplo de n menor que n^2, será evidentemente de la forma $n' \times n$, siendo $n' < n$; y como los múltiplos de los números primos menores que n han sido tachados, es claro que $n' \times n$ lo ha sido tambien, porque n' es un número primo ó un múltiplo de un número primo menor que n (127); luego han sido borrados todos los múltiplos de n.

Vamos ahora á demostrar que siendo p el número primo inmediatamente superior á n, todos los números que hayan quedado por tachar desde 1 hasta $p \times p$ son números primos.

Sea N un número de los que hayan quedado por tachar, y vamos á demostrar que tiene que ser necesariamente un número primo.

En efecto, un número cualquiera menor que $p \times p$, ó es un número primo, ó un múltiplo de un número primo menor que p; todos los múltiplos de los números primos menores qne p se han tachado por lo que hemos visto anteriormente; luego N que no se ha tachado no puede ser múltiplo de ningun número primo menor que p, y por consiguiente será primo.

129. *Para conocer si un número* N *es ó no primo, se divide por la serie de los números primos* 2, 3, 5, 7, 11, *etc., y si llegamos, sin obtener cociente exacto entero, á encontrar un cociente entero menor que el último divisor ensayado, podremos asegurar, sin ensayar más divisiones, que el número* N *es primo.*

En efecto, si N no fuese primo, seria (127) divisible por un número primo N′, y llamando Q al cociente se tendria

$$N = N'Q;$$

pero N es menor que DQ′, siendo D el último divisor ensayado y Q′ el cociente hallado por exceso, de donde

$$N'Q < DQ'.$$

Siendo $N'Q < DQ'$, los dos factores del primer producto, ó por lo ménos uno, tiene que ser evidentemente menor que los factores del segundo; pero ningun número primo menor que D da cociente exacto, luego N′ y Q tienen que ser mayores que D; y como D es mayor que Q′, se deduce que los dos factores del primer producto tienen que ser mayores que los del segundo; lo cual es absurdo.

De otro modo. Si las divisiones del número N por los números primos 2, 3, 5, 7, etc., no dan cociente entero exacto, y llegamos á ensayar la division de un número D el cual nos da tambien division inexacta cuyo cociente entero Q es menor que D, podremos asegurar que el número N es primo. En efecto, si hubiera algun factor que le dividiese, habia de ser mayor que D, y por lo tanto el cociente exacto hallado debia ser menor que Q; pero siendo la division exacta, el cociente hallado menor que Q, y por consiguiente menor que D, dividirá á N, y como por el supuesto ningun número menor que D divide á N, tampoco puede dividirle ningun número mayor; luego N es primo.

Principios relativos á los números primos.

130. *La serie de los números primos es ilimitada; es decir, que dado un número primo cualquiera, podremos demostrar que siempre hay otro número primo mayor que él.*

En efecto, sea N un número primo, y vamos á demostrar que hay un número primo mayor que N.

Sea P el producto de todos los números primos desde 1 hasta N, de modo que

$$1 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times \ldots N = P.$$

Si añadimos á P una unidad, se tendrá un número $P+1$, que podrá ser ó no primo: si lo es, $P+1$ es evidentemente mayor que N, y por lo tanto el principio queda demostrado. Si no es primo, será divisible por un número primo diferente de la unidad (127); pero siendo P el producto de todos los factores primos $1 . 2 . 3 \ldots$ hasta N, $P+1$ no puede ser divisible por ningun factor primo de los que se compone N, porque cualquier factor de los de P no puede serlo de $P+1$, sin ser un divisor de 1, diferencia entre $P+1$ y P (79), lo que no es posible; luego si á $P+1$ le divide un número primo y no es ninguno de los factores de P, tiene que ser mayor que el mayor factor de P que es N; luego hay un número primo mayor que N, que es lo que debiamos demostrar.

131. *Todo número primo que divide al producto de varios factores, divide por lo ménos á uno de ellos.*

Consideraremos dos casos: 1.° *que sean dos factores solamente;* y 2.° *que sean más de dos.*

Primer caso. Sea P el número primo, y AB el producto de los dos factores A y B: tratamos de demostrar que divide, por lo ménos, á uno de ellos A ó B.

En efecto, si P no divide al número A, será primo con él (126); en cuyo caso, dividiendo P al producto AB y siendo primo con uno de los factores A, tiene que dividir al otro factor B (113).

Segundo caso. Si el producto tiene más de dos factores, A, B, C, D, por ejemplo, podremos descomponerle en dos, uno A y otro el producto BCD de los demas; de modo que dividiendo el número primo P al producto de A por BCD, tiene que dividir, segun el primer caso, á uno de los factores A ó BCD; sino divide á A, dividirá á BCD, y como BCD se puede á su vez descomponer en el producto de B y CD, por la misma razon que ántes, si no divide á B, tiene que dividir á CD; y dividiendo á CD, ha de dividir necesariamente á C ó á D; luego el principio queda demostrado.

Consecuencias. 1.ª *Todo número primo que divide á una potencia divide á su raiz.*

En efecto, sea P el número primo que divide á la potencia A^m, y vamos á demostrar que P tiene que dividir á la raiz A.

A^m es igual á $A \times A \times A \times \ldots$ repetido m veces; dividiendo P al producto $A \times A \times A \times \ldots$, debe dividir á uno de los factores A (131); luego P divide á A.

2.ª *Si dos números son primos entre sí, sus potencias tambien lo son.*

Sean A y B dos números primos entre sí, y vamos á demostrar que sus potencias A^m y B^n tambien lo son. En efecto, si A^m y B^n no fuesen primos entre sí, tendrian un factor primo comun P, y como por dividir P á A^m y B^n dividiria tambien, segun la consecuencia anterior, á los números A y B, se sigue que P dividirá á A y B, lo que es contra la hipótesis; luego A^m y B^n son primos entre sí.

132. *Si un número es primo con cada uno de los factores de un producto, es primo tambien con el producto,* y recíprocamente, *todo número primo con un producto, lo es tambien con cada uno de sus factores.*

Sea P un número primo con cada uno de los factores del producto ABCD, y vamos á demostrar que tiene que ser tambien primo con dicho producto. En efecto, si P no fuese primo con el producto ABCD, habria un número primo n que dividiria á P y al producto ABCD; pero dividiendo al producto ABCD, tiene que dividir á uno de los factores, A por ejemplo; luego A y el número P tendrian el divisor comun n, lo cual es contra el supuesto.

Supongamos en segundo lugar, que P sea primo con el producto ABCD, y vamos á demostrar que es primo con cada uno de los factores A, B, C y D. En efecto, si no fuese primo con A por ejemplo, tendrian P y A un factor comun n; pero dividiendo n al número A, dividirá tambien al múltiplo suyo ABCD que es el producto, luego n dividiria á P y al producto, lo cual es contra la hipótesis: por consiguiente P es primo con cada uno de los factores A, B, C y D, segun queriamos demostrar.

133. *Todo número divisible por varios números primos entre sí dos á dos, es divisible por sus productos binarios, ternarios, etc.* (*)

Sea N un número divisible por cada uno de los números a, b, c, d, que son primos entre sí dos á dos, y vamos á demostrar que N es divisible por ab, abc y $abcd$.

En efecto, siendo N divisible por a, tendremos, llamando N′ al cociente exacto entero,

$$N = aN' \qquad [1].$$

El número b divide tambien á N, y por tanto á su igual aN'; pero es primo con a, luego dividirá á N′ (113), y llamando N″ al cociente, se tendrá

$$N' = bN''.$$

El número c, que tambien divide por hipótesis á N, dividirá á su igual aN'; pero es primo con a, luego dividirá á N′: dividiendo á N′, divide á su igual bN''; pero siendo c primo tambien con b, dividirá á N″, y llamando N‴ al cociente, tendremos

$$N'' = cN'''.$$

Por un raciocinio análogo se deduciria tambien

$$N''' = dN^{\text{IV}};$$

y así continuariamos si hubiese más factores. Sustituyendo ahora sucesivamente en la igualdad [1] los valores de N′, N″, N‴, etc., se tendrá

$$N = aN' = abN'' = abcN''' = abcdN^{\text{IV}};$$

(*) Se llaman productos binarios, ternarios, etc. los productos que se pueden formar tomando los factores de dos en dos, de tres en tres, etc.

lo que prueba que N es divisible por *ab*, *abc*, *abcd*, segun queriamos demostrar.

134. *Todo número que no es primo, se puede descomponer en el producto de números primos.*

Sea N un número no primo y que por lo tanto será divisible por un número primo a (127); de modo que llamando N' al cociente, se tendrá

$$N = aN'.$$

Si N' no es tampoco número primo, segun el mismo principio, será divisible por un número primo b, y dará

$$N' = bN'',$$

y por tanto $$N = abN''.$$

Si N'' tampoco fuese primo, seria divisible por otro número primo c; y se tendria

$$N'' = cN''',$$

de donde $$N = abcN''';$$

y continuando del mismo modo llegariamos á un número primo $N^{(n)}$; porque de lo contrario la serie de operaciones seria indefinida, y por lo tanto el número N tendria un número infinito de factores mayores que la unidad y menores que él, lo cual es absurdo. Por consiguiente llegaremos á un último número $N^{(n)}$, que será primo, como hemos dicho, y tendremos que como todos los anteriormente hallados a, b, c ... lo son tambien, el número N será igual al producto de todos ellos, y por consiguiente

$$N = abcd \ldots N^{(n)}.$$

Donde vemos que todo número N no primo, es igual al producto de factores primos.

Podrá suceder que algunos de estos factores sean iguales, en cuyo caso se ponen una sola vez con un exponente que exprese las veces que se halla repetido.

Así, si se tiene

$$N = a^m b^n c^p d^q,$$

se dice que el número N se halla descompuesto en sus factores primos a, b, c y d, y que estos factores están elevados á las potencias respectivas m, n, p y q.

135. *Un número no se puede descomponer más que en un solo sistema de factores primos.*

Sea N el número que se ha descompuesto en un sistema de factores primos A, B, C, D ... de los cuales algunos pueden ser iguales entre sí, de modo que se tiene

$$N = ABCD...$$

Supongamos que una nueva descomposicion diese el sistema de factores $A', B', C', D'...$; se tendria

$$N = A'B'C'D'...;$$

de modo que

$$ABCD... = A'B'C'D'...$$

siendo todos estos factores primos absolutos.

Si dividimos los dos productos por el factor primo A', tendremos

$$\frac{ABCD...}{A'} = B'C'D'...;$$

y siendo el segundo miembro un número entero, el primero tambien debe serlo; luego A' debe dividir al producto ABCD... y por lo tanto dividirá á uno de sus factores (131); pero siendo estos factores números primos, no podrá ninguno ser divisible miéntras no sea igual á él; luego A' tiene que ser igual á uno de los factores, A por ejemplo, lo que da

$$BCD ... = B'C'D'...$$

Del mismo modo se demostraria que B' tiene que ser igual á B, $C = C'$, $D = D'$, etc.; luego si todos los factores de la segunda descomposicion son respectivamente iguales á los de la primera, no hay más que una sola descomposicion.

136. *Para que un número divida á otro es necesario: 1.°, que no contenga ningun factor que no esté contenido en el que ha de ser divisible; 2.°, que ninguno venga elevado á mayor potencia.*

Sea N el número que ha de ser divisible por P, y vamos á demostrar: 1.°, que P no puede tener ningun factor que no esté contenido en N; 2.°, que ningun factor de los que tiene P puede estar elevado á mayor potencia que en el número N.

En efecto, sea P un número que divide á N, dando un cociente exacto entero N′, de modo que se tiene

$$N = P \times N'.$$

Vemos, pues, que si esta igualdad se ha de verificar, es decir, si P ha de dividir á N, es necesario: 1.°, que P no contenga factores primos distintos de los que hay en N, pues de lo contrario, dividiendo dicha igualdad por el factor primo que pudiera contener P sin hallarse en N, se tendria que un número fraccionario era igual á un número entero, lo cual es absurdo. Al mismo absurdo vendriamos á parar si supusiéramos que en P existia algun factor primo elevado á mayor potencia que en N; luego son condiciones necesarias para que P divida á N las dos que dejamos enunciadas.

Son estas condiciones, ademas de necesarias, suficientes; porque hallándose en N todos los factores primos de que P se compone, elevados, por lo ménos, á una potencia igual á la que se halla en P, siempre podremos descomponer á N en el producto de dos números: uno que se forme de todos los factores de P elevados á las mismas potencias, es decir, que sea el mismo número P, y otro que se componga de los factores restantes de N.

LECCION XV.

Investigacion de los factores simples y compuestos de un número. — Investigacion del máximo comun divisor de dos ó más números por la descomposicion en factores primos y simplificacion del método ordinario. — Mínimo comun múltiplo de dos ó más números por la descomposicion en factores.

Investigacion de los factores simples y compuestos de un número.

137. *Para hallar los factores simples de un número, se divide éste y los cocientes sucesivos que resulten por el menor factor simple distinto de la unidad hasta llegar al cociente 1, en cuyo caso los factores hallados serán los del número.*

Sea N el número cuyos factores simples queremos hallar. Despues de tirar á la derecha del número una raya vertical, se verá cuál es el menor factor primo, diferente de la unidad, que le divide exactamente. Supongamos que a sea este factor; colocándole á la derecha de la raya enfrente de N y efectuando la division, obtendremos un cociente entero que representaremos por Q. En seguida veremos si Q es tambien divisible por a; si lo es, se efectúa la division, y así se continúa dividiendo por a los cocientes que resultan, hasta llegar á uno N' que ya no sea divisible: de modo que si suponemos que se han hecho m divisiones, el número N podrá ponerse bajo la forma

N	a
Q	a
Q'	a
$\vdots$	$\vdots$
N'	b
Q_1	b
Q'_1	b
$\vdots$	$\vdots$
N''	c
Q_2	c
Q'_2	c
$\vdots$	$\vdots$

$$N = a^m N' \qquad [1].$$

En efecto, de la série de divisiones hechas se deduce que

$$N = aQ,\ Q = aQ',\ Q' = aQ'',\ Q'' = aQ''', \ldots$$

y sustituyendo los valores de Q, Q', Q'',... tendremos

$$N = aQ = a^2Q' = a^3Q'' = a^4Q''' \ldots = a^mN'.$$

Haciendo lo mismo con N' se tendrá, llamando b al menor factor primo que divide á N' y sus cocientes,

$$N' = b^nN''.$$

Del mismo modo se hallará

$$N'' = c^pN''';$$

y continuando así, se llegará necesariamente á un número primo que dividido por sí mismo dará la unidad; porque de lo contrario podriamos descomponer N en un número infinito de factores mayores que la unidad y menores que N, lo cual es absurdo.

Sea para fijar las ideas

$$N''' = d^q \times 1 = d^q.$$

Sustituyendo en la igualdad [1] los valores de N′, N″ y N‴, se tendrá

$$N = a^m \times b^n \times N'' = a^m \times b^n \times c^p \times N''' = a^m \times b^n \times c^p \times d^q.$$

Donde vemos que N se halla descompuesto en el producto de los factores primos a, b, c y d elevados respectivamente á las potencias cuyos exponentes son m, n, p y q.

Ejemplo. Sea 8712 el número cuyos factores simples vamos á determinar. Dispuesta la operacion como ya hemos dicho, se tendrá

8712	2
4356	2
2178	2
1089	3
363	3
121	11
11	11
1	

El menor factor simple distinto de la unidad que divide al número propuesto es 2, el cual da de cociente 4356, que dividido tambien por 2, lo mismo que su cociente 2178, nos da el número 1089, el cual no es ya divisible por 2; pero sí por 3. Efectuando la division hallamos el cociente 363, que dividido por 3 nos da 121. Este número no es ya divisible por 3, pero sí por 11, y da de cociente 11, que dividido por sí mismo da la unidad; luego los factores primos de 8712 son 2, 3 y 11, y dicho número es igual al producto $2^3 \times 3^2 \times 11^2$.

138. *Para hallar los factores simples y compuestos de un número, se principia por determinar los factores simples de dicho número, y en seguida, formando todos los productos de 2 en 2, de 3 en 3, de 4 en 4, etc. de estos números, se tendrán todos los factores tanto simples como compuestos del número propuesto.*

En efecto, todos los números que obtengamos, segun el procedimiento indicado, serán divisores del número propuesto; porque dichos números, ni tienen factores distintos de aquellos que contiene el número que ha de ser divisible, ni vienen elevados á mayores potencias, que son las condiciones necesarias y suficientes para que sean divisores del número propuesto (136); ademas, habiendo formado todos los productos de 2 en 2, de 3 en 3, etc., de los factores simples, contando con la unidad como factor de todo número, habremos hallado todos los divisores tanto simples como compuestos del número dado, que es lo que se pedia.

Ahora sólo falta ver cómo se forman todos estos productos siguiendo un órden sencillo.

Supongamos que sea N el número cuyos factores simples y compuestos queremos hallar, sean a, b, c y d sus factores simples, y m, n, p, q los exponentes de las potencias á que se hallan elevados respectivamente estos factores, de modo que se tendrá

$$N = a^m b^n c^p d^q.$$

Esto supuesto, pasemos á la investigacion de todos los factores del número N, cuya operacion se dispondrá segun indica el cuadro siguiente:

1	a	a^2	$\ldots$	a^m	$(m+1)$
b	ab	a^2b	$\ldots$	a^mb	
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$(m+1)n$
b^n	ab^n	a^2b^n	$\ldots$	a^mb^n	
c	ac	a^2c	$\ldots$	a^mc	
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	
b^nc	ab^nc	a^2b^nc	$\ldots$	a^mb^nc	
c^2	ac^2	a^2c^2	$\ldots$	a^mc^2	$(m+1)(n+1)p$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	
b^nc^p	ab^nc^p	$a^2b^nc^p$	$\ldots$	$a^mb^nc^p$	
d	ad	a^2d	$\ldots$	a^md	
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	
b^nc^pd	ab^nc^pd	$a^2b^nc^pd$	$\ldots$	$a^mb^nc^pd$	
d^2	ad^2	a^2d^2	$\ldots$	a^md^2	
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$(m+1)(n+1)(p+1)q$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	
$b^nc^pd^2$	$ab^nc^pd^2$	$a^2b^nc^pd^2$	$\ldots$	$a^mb^nc^pd^2$	
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	
$b^nc^pd^q$	$ab^nc^pd^q$	$a^2b^nc^pd^q$	$\ldots$	$a^mb^nc^pd^q$	

$(m+1) + (m+1)n = (m+1)(n+1)$

$(m+1)(n+1) + (m+1)(n+1)p = (m+1)(n+1)(p+1)$

$(m+1)(n+1)(p+1) + (m+1)(n+1)(p+1)q = (m+1)(n+1)(p+1)(q+1)$

139. Donde vemos, que poniendo la unidad y todas las potencias del primer factor, desde la primera hasta la enésima, se obtienen todos los divisores dependientes del factor a que son $(m+1)$; multiplicando estas potencias por $b, b^2, b^3 \dots b^n$, se hallan todos los factores dependientes de a y b, que son tantos como expresa la primera fila repetida tantas veces como potencias hay de b; es decir, $(m+1)n$, y agregando á éstos los de a, se tendrá $(m+1)(n+1)$. Multiplicando todos estos números por las potencias de c, se obtienen los factores dependientes de a, b y c, que son $(m+1)(n+1)p$, á los que agregando los ya formados nos da un número de factores igual á $(m+1)(n+1)(p+1)$; y por último, multiplicando estos números por $d, d^2, d^3 \dots$ se tendrán todos los factores dependientes de a, b, c y d, que son $(m+1)(n+1)(p+1)q$. Agregando á este producto los que ya llevamos formados, se obtiene el número total de factores $(m+1)(n+1)(p+1)(q+1)$; y así continuaríamos si hubiese más factores simples. De aquí se deduce que *para hallar de un modo práctico los factores simples y compuestos de un número, se escribe la unidad y las potencias del primer factor desde la primera hasta la enésima, en seguida se multiplican todos estos números por las potencias del segundo factor, despues se multiplican los números resultantes por las potencias del tercero, y así sucesivamente hasta haber multiplicado todos los números obtenidos por las potencias del último factor. Los números hallados de este modo serán los factores simples y compuestos del número propuesto.*

El número de factores vemos, segun el cuadro anterior, que es igual al producto que resulta de multiplicar los exponentes aumentados en una unidad.

Ejemplo. Sea 8712 el número cuyos factores simples y compuestos queremos hallar.

Siendo como hemos visto $8712 = 2^3 \times 3^2 \times 11^2$, segun el procedimiento indicado anteriormente, se tendrá

1	2	4	8	(3+1)
3	6	12	24	(3+1)(2+1)
9	18	36	72	(3+1)2
11	22	44	88	(3+1)(2+1)(2+1)=4.3.3=36
33	66	132	264	
99	198	396	792	
121	242	484	968	(3+1) (2+1) 2)
363	726	1452	2904	
1089	2178	4356	8712	

Observacion 1.ª Se deben considerar primero las potencias del factor que se halle repetido mayor número de veces, para que el número de filas sea el menor posible.

2.ª Una vez escrito el primer número de cada línea, para obtener los siguientes no hay más que irlos duplicando, triplicando, etc., segun que las potencias de la primera línea sean los del factor 2, 3, etc.

3.ª Los factores tomados á igual distancia del primero y último, deben dar por producto el número propuesto.

Investigacion del máximo comun divisor por la descomposicion en factores primos, y simplificacion del método ordinario.

140. *El máximo comun divisor de dos ó más números es el producto de las menores potencias de los factores primos comunes á todos estos números.*

Sea P el producto de las menores potencias de los factores primos comunes á los números A, B, C, D ..., y vamos á demostrar: 1.º, que P es un divisor comun de los números dados; 2.º, que es el mayor que cumple con esta condicion.

Componiéndose P de los factores primos comunes á los números dados, y estando estos factores elevados á las menores potencias que se hallan en dichos números, no habrá ninguno que no sea divisible por P (136); luego P es un divisor comun de todos los números A, B, C, D ...

Demostrado que P es un divisor comun de los números A, B, C, D ..., pasemos á probar que es el mayor número que los divide, y por consiguiente el *m . c . d .*

En efecto, ningun número P′ mayor que P puede ser divisor comun de todos los números dados; porque para ser P′ mayor que P es necesario que contenga algun factor primo diferente de los de P ó alguno elevado á mayor potencia: en el primer caso, el factor distinto que se halle en P′ no puede ser comun á todos los números A, B, C, D ..., y por consiguiente aquel que no tenga dicho factor no podrá ser divisible; luego P′ no puede ser divisor comun de todos los números dados.

En el segundo caso, si P′ contiene algun factor elevado á mayor potencia de las que contiene P, como éste se forma de los menores que se hallan en los números A, B, C, D ..., se sigue que P′ tambien contendrá factores elevados á mayor potencia que las que contienen algunos de los números propuestos, y por consiguiente aquel que tenga á dicho factor elevado á una potencia menor, no podrá ser divisible por P′; luego si P divide á todos los números A, B, C, D ... y ningun otro número mayor que él puede dividirles, P será el *m . c . d .*

141. Del principio anterior se deduce que *para hallar el* m . c . d . *de dos ó más números se determinan los factores primos de dichos números, y efectuando el producto de las menores potencias de los que sean comunes á todos, se tendrá el máximo comun divisor pedido.*

Ejemplo. Hallar el *m . c . d .* de los números 2880, 7920 y 9360.

Descompuestos en sus factores simples (137), se tiene

$$2880 = 2^6 \times 3^2 \times 5,\ 7920 = 2^4 \times 3^2 \times 5 \times 11,$$
$$9360 = 2^4 \times 3^2 \times 5 \times 13.$$

Los factores comunes á todos los números son 2, 3 y 5; el producto de sus menores potencias es

$$2^4 \times 3^2 \times 5 = 180;$$

luego 180 es el *m . c . d .* pedido.

142. Componiéndose el *m . c . d .* de los factores primos comunes á los números dados, se sigue que todo factor primo que no sea comun á los dos números se podrá suprimir, sin que por esto venga alterado dicho *m . c . d .*

Del mismo modo podremos tambien suprimir los factores comunes á los dos, teniendo en cuenta que dichos factores deben formar parte del *m . c . d .*

Ejemplo. Supongamos que se quiere hallar el *m . c . d .* de los números 2848 y 1412.

Desde luégo podremos observar que los dos tienen el factor comun 4, de modo que dividiendo por él se tendrán los números 712 y 353: siendo el primer número divisible por 8 y no teniendo el segundo el factor 2, será 8 primo con 353; de modo que podremos dividir el primero por 8, y queda reducida la cuestion á determinar el *m . c . d .* de 89 y 353; aplicando pues á los números 353 y 89 el procedimiento del *m . c . d .* tendremos

$$\begin{array}{r|l} 353 & 89 \\ \cline{2-2} 86 & 3 \end{array}$$

tomando el resto complementario, se halla para nuevo divisor el número 3, y como 3 es primo con 89, se deduce que el único factor comun á los números dados es 4; luego 4 será el *m . c . d .*

Investigacion del mínimo comun múltiplo por la descomposicion en factores primos.

143. *El mínimo comun múltiplo de dos ó más números es el producto de las mayores potencias de los factores primos distintos que hay en dichos números.*

Sea P el producto de las mayores potencias de los factores distintos que hay en los números A, B, C, D ..., y vamos á demostrar: 1.º, que P es un múltiplo comun de los números dados; 2.º, que es el menor comun múltiplo.

Componiéndose el número P de todos los factores distintos elevados á las mayores potencias que hay en los números dados, no habrá en P ningun factor que no esté en los números A, B, C, D ... y ninguno vendrá elevado á mayor potencia; luego P será divisible (136) por cada uno de los números dados; es decir, será un múltiplo comun de todos ellos.

Probado que P es un múltiplo comun de los números A, B, C, D ..., pasemos á demostrar que es el menor.

En efecto, ningun número P′ menor que P puede ser múltiplo de todos los números dados; porque para ser P′ menor que P, se necesita que contenga algun factor ménos que P, ó alguno elevado á menor potencia: en el primer caso, el factor que tenga demas P′ se hallará en alguno de los números dados, en A por ejemplo, y en ese caso vemos que P′ no puede ser comun múltiplo de todos los números propuestos, puesto que no lo es de A (136).

En el segundo caso, si P′ contiene algun factor elevado á menor potencia de los que contiene P, como éste se forma de los mayores que se hallan en los números dados, se sigue que P′ contendrá un factor, por lo ménos, elevado á una potencia menor que la que se halle en uno de estos números, en A por ejemplo, y habiendo un factor primo que se halle en A elevado á mayor potencia que en P′, se deduce (136) que P′ no puede ser un múltiplo de A, y por tanto no será comun múltiplo de todos los números propuestos.

Ahora bien, siendo P un múltiplo de todos los números A, B, C, D..., y no habiendo otro número P′ menor que cumpla con esta condicion, es claro que P será el mínimo comun múltiplo.

144. De lo dicho anteriormente resulta que *para hallar el* m . c . m . *de varios números, se descomponen éstos en sus factores primos, y efectuando el producto de las mayores potencias de los que haya distintos en todos los números, se tendrá el mínimo comun múltiplo.*

Ejemplo. Hallar el *m . c . m .* de los números 2880, 5640 y 5220.

Descompuestos en sus factores primos, se tiene

$$2880 = 2^6 \times 3^2 \times 5,\ 5640 = 2^3 \times 3 \times 5 \times 47,$$
$$5220 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 29.$$

El producto de las mayores potencias de los factores primos distintos, es

$$2^6 \times 3^2 \times 5 \times 47 \times 29 = 3925440;$$

luego 3925440 es el *m . c . m .* pedido.

NOTA. En esta segunda parte de la Aritmética, hemos demostrado las *propiedades generales de los números,* con toda generalidad para cualesquiera que aquellos sean; mas al hacerlo así, sin ninguna restriccion, debemos consignar algunas observaciones, para que no se crea que principios y verdades exactas é incontestables dejan de ser ciertas por una restriccion hecha sobre las operaciones que se practican, ó bien por considerar solamente números particulares. Así, cuando tratamos de demostrar las alteraciones que experimenta un cociente segun las que sufren los datos, ó tenemos que circunscribirnos solamente á ciertas operaciones particulares, en cuyo caso no podremos hacer aplicacion de ellas en lo sucesivo para cualquier clase de números, ó tenemos que separarnos algun tanto del modo de considerar los números que entran en una operacion.

Por ejemplo, en una division exacta en que el dividendo A es igual al producto del divisor B por el cociente entero Q, se demuestra que dividiendo el dividendo A por un número n, el cociente Q viene dividido por el mismo número. Esto no ofrece dificultad cuando n es un divisor del dividendo y cociente; pero si sólo fuese divisor del dividendo A, entónces el cociente Q vendrá dividido, segun hemos dicho, por n; y como la division de Q por n es inexacta, el nuevo cociente $\frac{Q}{n}$ no expresa un cociente entero exacto. Ahora bien, como en las divisiones que hasta aquí hemos efectuado no se han considerado á los cocientes, ya sean exactos ó no, sino como números enteros que nos expresan las veces que el dividendo contiene al divisor, ó el mayor número de veces que éste está contenido en aquel, al hallar el cociente $\frac{Q}{n}$ que no es entero, careceria de sentido la idea que tenemos del número cociente; pero prescindiendo de esta idea y no mirándole como el número que nos indica las veces que el dividendo contiene al divisor, sino como el número que multiplicado por el divisor nos da el dividendo, entónces no hay dificultad en admitir el principio con toda generalidad, pudiendo de este modo hacer aplicacion de él en las infinitas ocasiones que se presentan.

Hay más: una vez bien comprendido esto, será muy fácil obtener la alteracion que dicho cociente experimenta, y decir todo lo que ocurre con relacion á ella. En efecto, supongamos que n

no divide á Q; llamando al cociente entero Q′ y R al resto, se tendrá

$$Q = nQ' + R,$$

de donde se deduce

$$A = B\,(Q'n + R) = BQ'n + BR;$$

y dividiendo por *n* será

$$\frac{A}{n} = BQ' + \frac{BR}{n}:$$

lo cual nos prueba *que si el dividendo de una division se divide por un número* n *y se parte el número que resulta por el divisor, esta nueva division nos da por cociente entero el que se obtiene de dividir el cociente de la primera por el número* n; *y por resto el cociente de dividir por el mismo número* n *al producto del divisor y resto de la primera division.*

Del mismo modo podriamos ver que las alteraciones de que nos hemos ocupado en los números 71, 72 y 73 son ciertas, considerando al cociente entero como el número que multiplicado por el divisor nos da un producto, el cual sumado con el resto nos reproduce el dividendo; pudiendo por un raciocinio análogo al anterior deducir cuál es el cociente entero y resto de la nueva division que resulta de alterar el dividendo ó divisor de la primera.

Al hacer esta advertencia nos hemos propuesto probar que los principios demostrados son exactos para toda clase de números y operaciones, y que cuando se sienta un principio general, es necesario, para no faltar en nada, prescindir de los casos y convenios particulares; porque atendiendo á ellos esclusivamente, no podriamos hacer aplicacion de estos principios de una manera general, teniéndonos que circunscribir á los casos particulares que se hayan explicado.

TERCERA PARTE.

DE LOS NÚMEROS QUEBRADOS, MIXTOS Y FRACCIONES DECIMALES.

De los números quebrados y mixtos.

LECCION XVI.

Orígen de los quebrados. — Alteraciones que experimentan los quebrados segun las que sufren sus términos por via de multiplicacion ó division. — Simplificacion de quebrados. — Reduccion de quebrados á un comun denominador.

Orígen de los quebrados.

145. Cuando se trata de apreciar cantidades menores que aquella que se toma por unidad, nos vemos en la necesidad de dividir dicha unidad en un cierto número de partes iguales, y referir la cantidad que se va á medir á una de estas partes, dando orígen de este modo *á las fracciones ó quebrados ordinarios, á las fracciones decimales ó á los números complejos,* segun que la unidad se divida en un número de partes tal, que únicamente deba satisfacer á la condicion de que una de ellas esté contenida exactamente en la cantidad que se quiere medir; que las divisiones y subdivisiones se hagan siguiendo la ley decimal, refiriéndose siempre estas unidades á la principal, tanto en el primer caso como en el segundo; y por último, que dividiendo y subdividiendo la unidad principal en partes iguales, cada una de estas partes constituyen nuevas unidades á las que se refiere la cantidad que se va á medir.

Vemos, pues, que las *fracciones* ó *quebrados* tienen su orígen ó resultan de la medicion de una cantidad con una unidad mayor que aquella; lo cual se consigue dividiendo la unidad en un cierto número de partes iguales, y viendo las veces que una de estas partes está contenida en la cantidad que se quiere medir. De modo, que si se quiere medir con la vara la longitud de un alambre menor que la vara, y para conseguirlo hemos dividido ésta en 7 partes iguales y una de ellas está contenida 4 veces, la longitud de dicho alambre estará representada por la relacion de los números 4 y 7, la cual se expresa así: $\frac{4}{7}$, y se lee *cuatro séptimos*.

De lo dicho se deduce que para escribir un quebrado se necesitan dos números: uno que expresa las partes en que se ha dividido la unidad, llamado *denominador*, y otro que se llama *numerador* y que indica las veces que una de las partes del denominador está contenida en la cantidad que se quiere medir. En el ejemplo anterior el 7 es el *denominador*, é indica que la unidad se ha dividido en 7 partes, y por lo tanto *denomina* su magnitud; el 4 es el *numerador* que nos expresa las veces que la cantidad alambre contiene á una de las partes del denominador, y que por consiguiente *numera* las que de éstas contiene el quebrado.

146. Para leer un quebrado se lee el numerador, y las unidades que expresa se denominan *medios*, *tercios*, *cuartos*, *quintos*, *sextos*, *séptimos*, *octavos*, *novenos* ó *décimos*, segun que el denominador sea 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ó 10: en general cuando el denominador pasa de 10, se le hace terminar en la palabra *avos* ó se le añade dicha terminacion.

Así, los quebrados

$$\frac{2}{5},\ \frac{3}{7},\ \frac{5}{9},\ \frac{11}{12},\ \frac{23}{47},$$

se leerán: 2 *quintos*, 3 *séptimos*, 5 *novenos*, 11 *dozavos*, 23 *cuarenta y siete avos*.

147. No sólo la comparacion de una cantidad con su unidad puede darnos el quebrado, sino que tambien puede provenir de una division que no se puede efectuar en números enteros, como, por ejemplo, 4 dividido entre 9. En efecto, el cociente de 4 entre 9 tiene que ser evidentemente menor que la unidad y por lo tanto una fraccion ó quebrado, que se determinará dividiendo

cada una de las unidades del dividendo en tantas partes como unidades tiene el divisor, lo cual dará un número de partes igual al producto del divisor por el dividendo: efectuando en seguida la division del número resultante por el divisor, encontraremos por cociente exacto un número igual al dividendo; pero este cociente no expresará unidades, sino partes de la unidad cuya denominacion marcará el divisor. Así, el cociente que resulta de dividir 4 entre 9 será $\frac{4}{9}$, el cual se obtiene dividiendo cada unidad del dividendo 4 en 9 partes, que son las unidades que tiene el divisor, lo que da el número 36; de modo que dividiendo 36 por 9 resultará por cociente otra vez el número 4, con la diferencia de que no serán 4 unidades, sino 4 *novenas partes*, ó lo que es lo mismo $\frac{4}{9}$.

148. De aquí se deduce que podremos considerar al quebrado bajo dos aspectos: ó *como tal número quebrado que nos expresa una ó varias partes de la unidad*, ó *como la division indicada del numerador por el denominador, cuyo cociente es el quebrado.*

149. Los quebrados se dividen en propios é impropios. *Quebrado propio* es aquel cuyo numerador es menor que el denominador, como $\frac{3}{5}$; y *quebrado impropio* ó *número fraccionario* es el que tiene el numerador mayor que el denominador, como $\frac{7}{5}$. Cuando el numerador es igual al denominador, el quebrado representa la unidad.

Si el numerador de un quebrado es mayor que el denominador, el quebrado contendrá enteros, los cuales se determinarán *efectuando la division indicada del numerador por el denominador;* porque cuantas veces esté contenido el denominador en el numerador, tantas unidades habrá: así

$$\frac{18}{5}=3+\frac{3}{5}.$$

Donde vemos que un número fraccionario es igual á un número entero ó mixto, el cual se obtiene hallando el cociente exacto de dividir el numerador por el denominador.

RECÍPROCAMENTE: *todo número mixto se puede reducir á fraccionario multiplicando el entero por el denominador del quebrado, añadiendo á este producto el numerador, y poniendo al resultado por denominador el mismo del quebrado.* Así,

$$3\frac{2}{5}=\frac{3\times5+2}{5}=\frac{15+2}{5}=\frac{17}{5}.$$

En efecto, dividiendo cada unidad del entero en tantas partes como unidades tiene el denominador del quebrado, dará un número de partes igual al producto del entero por el denominador; de modo que agregando á este número las partes que contiene el quebrado, las cuales están expresadas por el numerador, tendremos el entero y quebrado reducidos á número fraccionario.

150. El valor de un quebrado no depende, como algunos creen, del numerador ni del denominador, sino de la relacion que hay entre ellos. Así, un quebrado que tenga un denominador doble del numerador, siempre expresará la mitad de la unidad ó sea $\frac{1}{2}$, si fuese tres veces mayor expresará la tercera parte ó $\frac{1}{3}$, y así sucesivamente.

Tambien es un error decir, *que la unidad de todo quebrado es 1 partido por el denominador*, es decir, que en el quebrado $\frac{3}{5}$, por ejemplo, la unidad es $\frac{1}{5}$ (*).

(*) En efecto, si el quebrado resulta de medir una cantidad con una unidad mayor que ella (145), y nos expresa una ó varias partes de esta unidad, ¿no hay un contrasentido al decir que el quebrado tenga por unidad otra diferente de aquella de la que él expresa parte ó partes? Al decir $\frac{3}{5}$ ¿no va envuelta la idea de que esos $\frac{3}{5}$ son de alguna cosa que es precisamente la unidad? Entónces ¿á qué decir que la unidad de $\frac{3}{5}$ es $\frac{1}{5}$? Verdad es que podria decirse: *es que la unidad $\frac{1}{5}$ del quebrado $\frac{3}{5}$ la consideramos distinta de la principal, sabiendo que hay una relacion entre ámbas.* Entónces dejan de existir los quebrados: son números *complejos* ó *denominados* los que se obtienen.

Alteraciones que experimentan los quebrados segun las que sufren sus términos por via de multiplicacion ó division.

151. *Si dos quebrados tienen un mismo denominador y distintos numeradores, el que tenga mayor numerador será mayor.* En efecto, teniendo un mismo denominador, las partes que cada uno expresa de la unidad son iguales, y por consiguiente el que contenga mayor número de estas partes será mayor; pero el numerador es el que expresa el número de estas partes, luego el que tenga mayor numerador será el mayor.

CONSECUENCIA. *Si el numerador de un quebrado se duplica, triplica,* ó en general, *se le multiplica por un número entero cualquiera, el quebrado viene multiplicado por dicho número entero.* En efecto, el quebrado resultante tiene el mismo denominador que el propuesto, pero su numerador es 2, 3 ... *n* veces mayor que el de éste; luego dicho quebrado resultante será dos, tres ... *n* veces mayor que el propuesto.

Por el contrario, *si el numerador de un quebrado se divide por* 2, 3 .... n, *siendo exacta la division, el quebrado resultante será* 2, 3 ... n *veces menor*. En efecto, el número de partes que expresa el segundo es 2, 3 ... *n* veces menor que el que expresa el primero, y como las partes son iguales puesto que el denominador no varía, se sigue que el segundo quebrado es dos, tres ... *n* veces menor que el primero.

152. *Si dos quebrados tienen un mismo numerador y distinto denominador, el que tenga mayor denominador será menor.* En efecto, cada uno expresa un mismo número de partes, puesto que son iguales los numeradores; pero estas partes son menores en aquel cuyo denominador es mayor, porque es evidente que á medida que aumenta el número de partes en que se divide la unidad, éstas disminuyen; luego el que tiene mayor denominador es el menor.

CONSECUENCIA. *Si el denominador de un quebrado se multiplica por un número entero* n, *el quebrado que resulta és* n *veces menor que el propuesto*. Porque estos dos quebrados, el propuesto y resultante, tienen el mismo numerador; pero el denominador del segundo es *n* veces mayor que el del primero, y por consiguiente las partes del segundo son *n* veces más pequeñas: luego el segundo quebrado es tambien *n* veces más pequeño.

Por el contrario, *si el denominador de un quebrado se divide por* 2, 3 ... n, *siendo exacta la division, el quebrado que resulta será* 2, 3 ... n *veces mayor*. En efecto, á medida que el denominador disminuye, la magnitud de las partes aumenta; luego si dicho denominador se ha hecho *n* veces menor, aquellas serán *n* veces mayor, y por consiguiente el quebrado se ha hecho tambien *n* veces mayor.

153. De lo dicho anteriormente se deduce: 1.°, *que para multiplicar un quebrado por un número entero, se multiplica el numerador ó se divide el denominador por dicho número;* 2.°, *para dividir un quebrado por un número entero, se divide el numerador ó se multiplica el denominador por dicho número;* 3.°, *el valor de un quebrado no varía multiplicando ó partiendo los dos términos, ó sea el numerador y denominador, por un mismo número*. Porque el mismo número de veces que se hace mayor ó menor multiplicando ó partiendo el numerador por un número entero, ese mismo número de veces se hace menor ó mayor al multiplicar ó partir el denominador; luego el quebrado no ha cambiado de valor.

Simplificacion de quebrados.

154. *Simplificar un quebrado es hallar otro que tenga el mismo valor, pero que sus términos sean más sencillos que los del propuesto.*

Cuando un quebrado no se puede expresar por otro de términos más sencillos, se dice que dicho quebrado es *irreducible.*

155. *Para simplificar un quebrado, se dividen sus dos términos por un mismo número entero todas las veces que se pueda.*

En efecto, el quebrado que resulta de dividir el numerador y denominador de otro por un mismo número entero, tiene evidentemente sus términos más sencillos que los del propuesto, y ademas los dos quebrados tienen el mismo valor (153–3.°); luego el quebrado queda simplificado.

Así, *para simplificar un quebrado, se principia por quitar*

un mismo número de ceros del numerador y denominador si ámbos están terminados por esta cifra, lo que equivale á dividir los dos términos de la fraccion por 10, 100, etc., segun que se hayan suprimido uno, dos, etc. ceros. Despues, si es posible, ***se dividen los dos términos del quebrado resultante por los números enteros cuyos caractéres de divisibilidad se conocen, tales como*** 2, 3, 5 ... ; y por último, si quitados los factores comunes al numerador y denominador, los términos del quebrado resultante fuesen bastante crecidos, ***se halla el máximo comun divisor de ellos, y si lo tienen, se dividen por él los dos términos de dicho quebrado, y el que resulte será el quebrado simplificado.***

Sea, por ejemplo, $\frac{990}{1650}$ la fraccion que queremos simplificar.

Tendremos

$$\frac{990}{1650} = \frac{99}{165} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5},$$

cuyo resultado se ha obtenido suprimiendo primero el factor 10 del numerador y denominador, en seguida dividiendo los términos de la fraccion resultante por 11, y despues por 3.

Sea, en segundo lugar, $\frac{34188}{85470}$ la fraccion que se desea simplificar.

Segun el procedimiento anterior se obtiene, quitando los factores comunes 2, 3, 11 y 7 que se ven inmediatamente,

$$\frac{34188}{85470} = \frac{17094}{42735} = \frac{5698}{14245} = \frac{518}{1295} = \frac{74}{185};$$

y como todavía los términos son bastante crecidos, les aplicamos el procedimiento del máximo comun divisor, y nos da por resultado 37; de modo que dividiendo los términos de la última fraccion por 37, se halla la fraccion irreducible $\frac{2}{5}$.

Ocioso seria el advertir lo muy esencial y útil que es la simplificacion de quebrados; porque ademas de podernos formar una idea más exacta de la cantidad que representan, tienen la inmensa ventaja de simplificar los cálculos que pudieran hacerse con ellos.

Es evidente que podria principiarse desde luégo por hallar el $m.c.d.$ de los términos de la fraccion propuesta y dividirles por él, resultando la fraccion simplificada; pero en la práctica sólo se apela á este medio despues de quitados los factores que á primera vista se ven.

156. *Los dos términos de un quebrado irreducible son primos entre sí.*

En efecto, si no lo fuesen, tendrian un factor comun, y dividiéndoles por él, el quebrado propuesto seria *equivalente* (*) á otro de términos más sencillos, lo que es contra la hipótesis: de modo que el quebrado que resulta de dividir los dos términos de otro por su $m.c.d.$, es el quebrado irreducible equivalente al primero.

157. *Todo quebrado equivalente á otro irreducible, tiene sus términos equimúltiplos* (**) *de los de éste.*

En efecto, sea el quebrado irreducible $\frac{m}{n}$, el cual es equivalente á otro $\frac{a}{b}$; y por lo tanto se tendrá

$$\frac{a}{b}=\frac{m}{n}.$$

Si estos dos quebrados los multiplicamos por b, tendrémos

$$a=\frac{bm}{n} \qquad [1];$$

y como a es un número entero, el cociente de bm por n tambien lo será; luego n divide al producto bm. Pero el número n es primo con m, luego dividirá á b (113), y llamando b' al cociente, que es entero, se tendrá

$$b=nb':$$

(*) Se dice que dos expresiones son equivalentes, cuando siendo diferentes en la forma, tienen el mismo valor.

(**) Se llaman números equimúltiplos de otros, los que resultan de multiplicar éstos por un mismo número entero.

de modo que sustituyendo en la igualdad [1] en vez de b su valor, será

$$a = \frac{nb'm}{n} = b'm;$$

luego los términos a y b del quebrado equivalente á otro irreducible, son respectivamente iguales á mb' y nb', es decir, equimúltiplos de los términos del quebrado irreducible.

De este principio se deduce: 1.°, *que todo quebrado cuyos términos son primos entre sí, es irreducible:* porque todo quebrado equivalente á él, tendria sus términos equimúltiplos, y por lo tanto mayores; 2.°, *para que dos quebrados irreducibles sean equivalentes, han de ser idénticos.* En efecto, los menores equimúltiplos de dos números son ellos mismos.

Reduccion de quebrados á un comun denominador.

158. Se entiende por reducir varios quebrados á un comun denominador, *hallar otros que sean respectivamente equivalentes á los propuestos, y que en todos esté dividida la unidad en un mismo número de partes;* es decir, *que tengan un mismo denominador.*

Esta trasformacion está fundada en el principio 153-3.°, y se efectúa de dos modos.

Primero. *Para reducir dos ó más quebrados á un comun denominador, se multiplican los dos términos de cada uno por el producto de los denominadores de los demas.* De este modo se hallan quebrados equivalentes á los primeros, y cada uno de ellos tiene por denominador el producto de todos; luego quedan reducidos á un comun denominador.

Segundo. Si los denominadores de los quebrados propuestos tienen factores comunes, se reducen á un comun denominador *hallando el* m. c. m. *de los denominadores, el cual será el denominador comun, y los numeradores se obtendrán multiplicando los de los quebrados propuestos por los cocientes que resultan de dividir el* m. c. m. *por cada denominador.*

En efecto, los quebrados resultantes serán equivalentes á los propuestos, porque sólo se ha hecho multiplicar los dos términos de cada uno por el cociente de dividir el *m . c . m .* por su denominador, y todos tendrán por denominador dicho *m . c . m .*

EJEMPLO 1.º Reducir á un comun denominador los quebrados $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{1}{7}$.

Aplicando la primera regla, se tendrá

$$\frac{2\times 5 . 7}{3\times 5 . 7}, \frac{4\times 3 . 7}{5\times 3 . 7}, \frac{1\times 3 . 5}{7\times 3 . 5};$$

ó lo que es igual,

$$\frac{70}{105}, \frac{84}{105}, \frac{15}{105}.$$

EJEMPLO 2.º Sean los quebrados que hemos de reducir á un comun denominador

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{12}, \frac{5}{8}.$$

Por la regla segunda, se tendrá

$$\frac{1\times 12}{24}, \frac{3\times 6}{24}, \frac{7\times 2}{24}, \frac{5\times 3}{24};$$

ó lo que es igual,

$$\frac{12}{24}, \frac{18}{24}, \frac{14}{24}, \frac{15}{24}.$$

Siempre que los denominadores tengan factores comunes, conviene aplicar la segunda regla en vez de la primera, por ser más breve y porque los quebrados resultantes son los más sencillos.

LECCION XVII.

Alteraciones que sufre un quebrado cuando á sus dos términos se les agrega ó disminuye un mismo número. — Sumar quebrados, un entero con un quebrado y números mixtos. — Restar quebrados, de un entero un quebrado, y números mixtos.

Alteraciones que sufre un quebrado cuando á sus dos términos se les agrega ó disminuye un mismo número.

159. Hemos visto ya que un quebrado no se altera multiplicando sus dos términos por un mismo número entero; y podria

creerse que tampoco sufre alteracion cuando á ámbos términos se les añade ó quita un mismo número, lo cual no es cierto; y para probarlo supongamos una fraccion en general $\frac{a}{b}$, agreguemos á sus dos términos el mismo número m, y obtendremos la fraccion $\frac{a+m}{b+m}$.

Si reducimos á un comun denominador la fraccion propuesta y la resultante, tendremos que dichas fracciones, estarán representadas por

$$\frac{ab+am}{b(b+m)} \text{ y } \frac{ab+bm}{b(b+m)};$$

de modo que teniendo ámbas el mismo denominador, la fraccion resultante será mayor, igual ó menor que la propuesta, segun que su numerador sea tambien mayor, igual ó menor que el de dicha fraccion propuesta.

Ahora bien, los numeradores de estas fracciones tienen el sumando ab comun; luego la relacion en que están, depende de los segundos sumandos am y bm, los cuales, como se ve, tienen el factor comun m, y por lo tanto

$$\text{Si } a<b,\ am<bm; \text{ y } \frac{a}{b}<\frac{a+m}{b+m}.$$

$$\text{Si } a=b,\ am=bm; \text{ y } \frac{a}{b}=\frac{a+m}{b+m}.$$

$$\text{Si } a>b,\ am>bm; \text{ y } \frac{a}{b}>\frac{a+m}{b+m}.$$

De aquí se deduce que *si á los dos términos de una fraccion se les agrega un mismo número, la fraccion que resulta será mayor, igual ó menor que la propuesta, segun que ésta sea propia, igual á la unidad ó impropia.*

Si en vez de aumentar á los dos términos de la fraccion propuesta el número m, lo hubiésemos disminuido, resultaria la fraccion $\frac{a-m}{b-m}$; de modo que reduciendo estas dos fracciones á un comun denominador y comparando sus numeradores, se tendrá que las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{a-m}{b-m}$ estarán representadas por las siguientes:

$$\frac{ab-am}{b(b-m)} \quad \text{y} \quad \frac{ab-bm}{b(b-m)}.$$

Los numeradores de estas fracciones tienen el minuendo comun ab, y los sustraendos el factor comun m; luego la segunda será mayor, igual ó menor que la primera, segun que a sea mayor, igual ó menor que b: porque siendo a, por ejemplo, menor que b, el sustraendo am es menor que bm, y como á medida que disminuye el sustraendo aumenta la resta (19), se sigue que el primer quebrado es mayor que el segundo: lo mismo se demostrarian los demas casos; luego

$$\text{Si } a < b, \qquad \frac{a}{b} > \frac{a-m}{b-m}.$$

$$\text{Si } a = b, \qquad \frac{a}{b} = \frac{a-m}{b-m}.$$

$$\text{Si } a > b, \qquad \frac{a}{b} < \frac{a-m}{b-m}.$$

Es decir, *que si se quita un mismo número* m *de los dos términos de un quebrado, el que resulta será menor, igual ó mayor que el primero, segun que éste sea propio, igual á la unidad ó impropio.*

Observacion. Representándose la unidad por una fraccion cuyos términos son iguales, se sigue *que á toda fraccion propia le falta para valer la unidad otra fraccion cuyo numerador es la diferencia de los dos términos de la primera, y cuyo denominador será el mismo de la fraccion propuesta.* Es decir, que á la fraccion propia $\frac{a}{b}$ le falta $\frac{b-a}{b}$ para valer la unidad. Esto supuesto, si aumentamos ó disminuimos un número á los dos términos de la fraccion propia $\frac{a}{b}$, se convertirá en $\frac{a+m}{b+m}$ ó en $\frac{a-m}{b-m}$, y á estas dos fracciones les faltará para valer la unidad, segun lo dicho anteriormente, las fracciones respectivas $\frac{b-a}{b+m}$ y $\frac{b-a}{b-m}$: donde vemos que á medida que m aumente, la fraccion $\frac{b-a}{b+m}$ irá disminuyendo (152), porque siendo constante el numerador, va aumentando el denominador; luego *á medida que aumenta el número* m *que se añade á los dos términos de una fraccion, la que resulta se va aproximando á valer la unidad.*

La segunda fraccion $\frac{b-a}{b-m}$ va aumentando á medida que m crece; en efecto, para que m se pueda restar de los dos términos de la fraccion propia $\frac{a}{b}$, es necesario que sea menor ó á lo más igual al menor de ellos a; luego aumentando m hasta valer a, el denominador $b-m$ va disminuyendo hasta valer $b-a$, y por consiguiente $\frac{b-a}{b-m}$ tiende á ser igual á la fraccion $\frac{b-a}{b-a}$ que es igual á la unidad; pero esta fraccion expresa la diferencia que hay entre la unidad y la que resulta de restar de los dos términos de la fraccion propia $\frac{a}{b}$ una misma cantidad m; luego si la diferencia que hay entre la unidad y $\frac{a-m}{b-m}$ tiende á ser igual á 1, la *fraccion que resulta de restar de los dos términos de otra propia una misma cantidad* m, *tiende á ser cero, á medida que* m *se aproxima á valer* a.

Si la fraccion $\frac{a}{b}$ es impropia, excederá la unidad en $\frac{a-b}{b}$, y por consiguiente, la fraccion que resulta de agregar el número entero m á los dos términos de la propuesta, excederá á la unidad en $\frac{a-b}{b+m}$, y como esta fraccion va disminuyendo á medida que m aumenta, la fraccion resultante $\frac{a+m}{b+m}$ se va diferenciando cada vez ménos de la unidad; y por lo tanto podremos decir *que aumentando á los dos términos de una fraccion propia ó impropia un número entero cualquiera, la fraccion que* *resulta va aproximándose á valer la unidad á medida que dicho número va creciendo.*

Hemos visto anteriormente que quitando de los dos términos de una fraccion propia un número entero, la que resulta va aproximándose á valer cero; si la fraccion dada fuera impropia, excederia á la unidad en la diferencia de sus dos términos partida por el denominador, y por lo tanto la que resulta de restar de sus dos términos el número m, excederá á la unidad en $\frac{a-b}{b-m}$, y como este exceso aumenta á medida que m va aumentando, la fraccion $\frac{a-m}{b-m}$ irá aumentando cada vez más; de donde podremos deducir *que disminuyendo de los dos términos de una fraccion propia ó impropia un mismo número* m, *la fraccion que resulta va diferenciándose cada vez más de la unidad.*

Sumar quebrados, un entero con un quebrado y números mixtos.

160. *Para sumar quebrados se reducen á un comun denominador si no lo tienen, se suman los numeradores, y á la suma se le pone por denominador el denominador comun.*

En efecto, reduciendo los quebrados á un comun denominador si no lo tienen, cada uno expresa partes iguales de la unidad, y por lo tanto reuniendo las que cada uno contiene, lo cual se consigue sumando los numeradores, tendremos la cantidad que equivale á la suma de los valores de los sumandos.

Sean los quebrados que hemos de sumar $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{7}$ y $\frac{2}{7}$.

Como tienen un comun denominador 7, cada uno expresa *séptimas* partes de la unidad: luego sumando las que cada quebrado contiene, se tendrá la suma; y como estas partes están representadas por los numeradores (145), sumándoles, se tendrá el número que expresa las que contiene el resultado.

Así, $\frac{3}{7}+\frac{4}{7}+\frac{2}{7}=\frac{3+4+2}{7}=\frac{9}{7}=1\frac{2}{7}$.

Supongamos que queremos sumar las fracciones $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{12}$ y $\frac{5}{8}$.

Como tienen diferentes denominadores; no expresan partes iguales de la unidad; por lo que no se pueden sumar así.

Reduciéndoles á un comun denominador (158), y sumando como ántes los numeradores, se tendrá

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{7}{12}+\frac{5}{8}=\frac{12}{24}+\frac{18}{24}+\frac{14}{24}+\frac{15}{24}=$$

$$\frac{12+18+14+15}{24}=\frac{59}{24}=2\frac{11}{24}.$$

161. *Para sumar un entero con un quebrado se escribe el entero y despues el quebrado, y queda la suma bajo la forma de un número mixto,* el cual podrá reducirse á fraccionario (149) *multiplicando el entero por el denominador del quebrado, añadiendo á este producto el numerador, y poniendo al resultado por denominador el del quebrado.*

Así, la suma del entero 32 con el quebrado $\frac{2}{5}$ será

$$32\frac{2}{5}=\frac{32\times 5+2}{5}=\frac{162}{5}.$$

162. *Para sumar números mixtos, se suman primero los quebrados, y si esta suma compone algun entero se une á la suma de los enteros.*

En efecto, el número que así resulte se compondrá de todas las unidades y partes de ella que contengan los sumandos, que es precisamente la suma.

Ejemplo. Supongamos que se quiere sumar los números mixtos $12\frac{2}{3}$, $18\frac{2}{5}$, $32\frac{4}{9}$ y $24\frac{7}{10}$.

Se dispondrá la operacion del modo siguiente:

$$\begin{array}{r} \overset{2}{\smile} \\ 12\frac{2}{3} \\ 18\frac{2}{5} \\ 32\frac{4}{9} \\ 24\frac{7}{10} \\ \hline 88\frac{19}{90} \end{array} \left\{ \frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\frac{4}{9}+\frac{7}{10}=\frac{60}{90}+\frac{36}{90}+\frac{40}{90}+\frac{63}{90}=\frac{199}{90}=2\frac{19}{90}. \right.$$

Tambien pueden sumarse los números mixtos reduciéndolos á fraccionarios, lo cual convierte este caso en el de sumar quebrados.

Restar quebrados, de un entero un quebrado y números mixtos.

163. *Para restar un quebrado de otro, se reducen á un comun denominador si no le tienen, se restan los numeradores, y á la resta se le pone por denominador el denominador comun.*

En efecto, estando reducidos los quebrados á un comun denominador, ámbos expresan partes iguales de la unidad; por lo tanto, la diferencia de los numeradores expresará el número de partes que sumado con el sustraendo nos da el minuendo, y para indicar que estas partes son iguales á las de los quebrados que se restan, se les pone por denominador el denominador comun.

Así, $$\frac{7}{9}-\frac{5}{9}=\frac{2}{9};$$

y $$\frac{4}{5}-\frac{3}{7}=\frac{28}{35}-\frac{15}{35}=\frac{13}{35}.$$

164. *Para restar de un entero un quebrado, se toma una unidad del entero y se reduce á la especie del quebrado, de ella se resta dicho quebrado, y el número entero disminuido en una unidad seguido de la fraccion que resulte, será la resta pedida.*

Así, $$3478-\frac{23}{77}=3477\frac{54}{77}.$$

Como la unidad reducida á la especie del quebrado sustraendo es igual (149) á $\frac{77}{77}$, se deduce que para hallar la diferencia entre una fraccion y la unidad, se resta el numerador del denominador, y al resultado se le pone por denominador el mismo del quebrado.

Tambien puede reducirse la resta de un entero y quebrado á la de dos quebrados, poniéndo el entero bajo la forma de fraccion; pero este método es muy pesado cuando el entero y los términos del quebrado son bastante crecidos.

165. *Para restar números mixtos se restan primero los quebrados y despues los enteros.* Si el quebrado del minuendo fuese menor que el del sustraendo, *se le agrega á áquel una unidad y se efectúa la resta, teniendo cuidado de considerar con una unidad ménos al entero del minuendo.*

Sean los números que se han de restar $37\frac{3}{5}$ y $25\frac{2}{7}$.

Dispuesta la operacion como á continuacion se ve, efectuaremos la resta de los quebrados, y despues la de los enteros, y tendremos el número mixto que sumado con el sustraendo nos da el minuendo, y por consiguiente la resta.

$$\begin{array}{l} 37\frac{3}{5} \\ 25\frac{2}{7} \\ \hline 12\frac{11}{35} \end{array} \Big\} \ \frac{3}{5}-\frac{2}{7}=\frac{21}{35}-\frac{10}{35}=\frac{21-10}{35}=\frac{11}{35}.$$

Supongamos en segundo lugar que de $347\frac{2}{5}$ se quiere restar $139\frac{3}{4}$.

Dispuesta la operacion como anteriormente, se tiene

$$\begin{array}{l} 347\frac{2}{5} \\ 139\frac{3}{4} \\ \hline 207\frac{13}{20} \end{array} \Big\} \ \frac{2}{5}-\frac{3}{4}=\frac{8}{20}-\frac{15}{20};\ \frac{20+8}{20}-\frac{15}{20}=\frac{13}{20}.$$

Donde vemos que despues de reducidos los quebrados á un comun denominador, no se puede efectuar la resta á causa de ser el primero menor que el segundo; pero tomando una unidad de los enteros, reduciéndola á quebrado y agregándola al minuendo, nos da un resultado del cual puede ya restarse el sustraendo; efectuando despues la resta de los enteros, considerando al minuendo con una unidad ménos, hallamos el resultado que se pide.

Tambien puede reducirse la resta de números mixtos á la de quebrados, poniendo éstos bajo la forma de números fraccionarios; pero este método es en general más pesado.

Si se hubiera de restar un entero de un número mixto, se restarian los enteros, y agregando á la resta el quebrado del minuendo tendriamos el resultado.

Si se quisiera restar de un entero un número mixto, tomariamos una unidad del entero minuendo de la cual restariamos el quebrado del sustraendo, y restando despues los enteros, considerando con una unidad ménos al del minuendo, obtendriamos el resultado pedido.

LECCION XVIII.

Multiplicacion de quebrados, de un entero por un quebrado y de números mixtos.— Division de quebrados, de un entero por un quebrado y de números mixtos.

Multiplicacion de quebrados, de un entero por un quebrado y de números mixtos.

166. En la multiplicacion de quebrados debemos considerar varios casos: 1.°, *multiplicar un quebrado por un entero;* 2.°, *un entero por un quebrado;* 3.°, *un número quebrado por otro;* 4.°, *un mixto por un entero ó quebrado;* 5.°, *un entero ó quebrado por un número mixto;* y 6.°, *dos números mixtos.*

PRIMER CASO. Para multiplicar un quebrado por un entero sabemos (153–1.°) que se pueden seguir dos métodos: *ó multiplicar el numerador del quebrado por el entero, ó dividir el denominador por dicho número entero.* El primero de estos métodos constituye la regla general, porque siempre es aplicable; el segundo sólo se emplea cuando el número entero por que se quiere multiplicar el quebrado es un divisor del denominador del mismo; y debe preferirse este segundo método, siempre que se pueda, porque da un resultado más sencillo que el primero.

Sea multiplicar el quebrado $\frac{3}{5}$ por el entero 4. Se tendrá

$$\frac{3}{5}\times 4=\frac{3\times 4}{5}=\frac{12}{5}=2\,\frac{2}{5}.$$

Multipliquemos ahora el quebrado $\frac{7}{12}$ por 3; y empleando el segundo método, por ser el denominador 12 divisible por 3, tendremos

$$\frac{7}{12}\times 3=\frac{7}{12:3}=\frac{7}{4}=1\,\frac{3}{4}.$$

Efectuando esta multiplicacion por el primer método, obtendriamos

$$\frac{7}{12}\times 3=\frac{7\times 3}{12}=\frac{21}{12}=1\,\frac{9}{12}=1\,\frac{3}{4}.$$

Donde vemos que para hallar el resultado final ha sido necesario hacer una simplificacion, la cual se evitó empleando el segundo método.

SEGUNDO CASO. *Para multiplicar un entero por un quebrado, se multiplica el entero por el numerador del quebrado y el producto se parte por el denominador.*

En efecto, el producto ha de ser del multiplicando lo que el multiplicador sea de la unidad; luego si hallamos la parte que es del entero multiplicando lo que una parte del quebrado es de la unidad y la repetimos tantas veces como partes tiene el quebrado, obtendremos el producto. Ahora bien, la parte que es del entero, lo que la del quebrado es de la unidad, se obtiene dividiendo el entero por el denominador del quebrado, y ésta se repite tantas veces como partes tiene dicho quebrado, multiplicándola por el numerador; y como para multiplicar por un número el cociente de otros dos basta multiplicar el dividendo por este número, se sigue que multiplicando el entero por el numerador del quebrado y partiendo el producto por el denominador, se tendrá lo que se pide.

Aplicando el raciocinio anterior al caso de multiplicar el entero 5 por el quebrado $\frac{4}{7}$, tendremos que el producto será respectó de 5 lo que $\frac{4}{7}$ es de la unidad, y como $\frac{4}{7}$ es cuatro veces la *séptima* parte de la unidad, el producto será cuatro veces la *séptima* parte de 5; la séptima parte de 5 se obtiene dividiendo 5 por 7 (41–4.ª): por tanto dicha séptima parte será $\frac{5}{7}$; de modo que repitiendo $\frac{5}{7}$ cuatro veces, ó lo que es lo mismo, multiplicándole por 4, se tendrá $\frac{5\times 4}{7}$ què será el producto: luego

$$5\times\frac{4}{7}=\frac{5\times 4}{7}=\frac{20}{7}=2\frac{6}{7}.$$

Observacion. En el caso de ser el entero divisible por el denominador del quebrado, conviene efectuar esta division y multiplicar el cociente que resulta por el numerador, lo qué nos dará el producto simplificado.

Supongamos se quiere multiplicar 12 por $\frac{3}{4}$.

Como 12 es divisible por el denominador 4, en vez de emplear el procedimiento general, dividiremos 12 por 4, el cociente 3 lo multiplicaremos por el numerador del quebrado, y obtendremos el producto 9 que se pedia.

Tercer caso. *Para multiplicar un quebrado por otro, se multiplican los numeradores, despues los denominadores, y se parte el primer producto por el segundo.*

En efecto, el producto ha de ser del multiplicando lo que el multiplicador es de la unidad; luego si se hubiera de multiplicar $\frac{3}{4}$ por $\frac{5}{7}$, el producto seria de $\frac{3}{4}$ lo que $\frac{5}{7}$ es de la unidad, es decir, cinco veces la *séptima parte*. Ahora bien, la séptima parte de $\frac{3}{4}$ es (153–2.°) $\frac{3}{4\times 7}$, y esta séptima parte, repetida cinco veces ó multiplicada por 5, nos da (2.° *caso*) $\frac{3\times 5}{4\times 7}$, que es el producto; luego

$$\frac{3}{4}\times\frac{5}{7}=\frac{3\times 5}{4\times 7}=\frac{15}{28}.$$

Observacion. Si el numerador del quebrado multiplicando es divisible por el denominador del quebrado multiplicador, se podrá efectuar dicha division; y multiplicando el quebrado que resulte por el numerador del segundo, tendremos el producto pedido.

En efecto, sean los quebrados que hemos de multiplicar $\frac{8}{11}$ y $\frac{3}{4}$. Como 8 es divisible por 4, se hallará la cuarta parte de $\frac{8}{11}$, dividiendo 8 por 4 (153-2.°), lo cual nos da $\frac{2}{11}$, y repitiendo esta cuarta parte 3 veces, obtendremos el producto pedido $\frac{6}{11}$; cuyo resultado es más sencillo que el que se obtiene por la regla general.

Cuarto caso. *Para multiplicar un número mixto por un entero ó quebrado, se reduce el mixto á quebrado y se efectúa la multiplicacion del quebrado que resulta por el entero ó quebrado multiplicador: ó bien se multiplica el entero y quebrado del número mixto por el multiplicador y se suman los productos parciales* (52).

Sea el producto que queremos hallar $\left(4+\frac{2}{5}\right)\times 3$.

Reduciendo el entero á la especie del quebrado y efectuando la multiplicacion, se tendrá

$$\left(4+\frac{2}{5}\right)\times 3=\frac{4\times 5+2}{5}\times 3=\frac{22}{5}\times 3=\frac{66}{5}=13\,\frac{1}{5}.$$

Sea, en segundo lugar, el producto de $\left(4+\frac{2}{5}\right)\times\frac{3}{7}$, el cual se reducirá á multiplicar $\frac{22}{5}$ por $\frac{3}{7}$; luego se tendrá

$$\left(4+\frac{2}{5}\right)\times\frac{3}{7}=\frac{22}{5}\times\frac{3}{7}=\frac{22\times 3}{5\times 7}=\frac{66}{35}=1\,\frac{31}{35}.$$

Estos mismos ejemplos, resueltos por el segundo método, nos dan

$$\left(4+\frac{2}{5}\right).3=4.3+\frac{2}{5}.3=12+\frac{6}{5}=12+1+\frac{1}{5}=13\frac{1}{5}.$$

$$\left(4+\frac{2}{5}\right).\frac{3}{7}=4.\frac{3}{7}+\frac{2}{5}.\frac{3}{7}=\frac{12}{7}+\frac{6}{35}=$$

$$\frac{60}{35}+\frac{6}{35}=\frac{66}{35}=1\,\frac{31}{35}.$$

QUINTO CASO. *Para multiplicar un entero ó quebrado por un número mixto, se convierte el número mixto en fraccionario, y queda reducido á multiplicar un entero ó quebrado por un quebrado: ó bien se multiplica el multiplicando por el entero y quebrado del multiplicador, y la suma de los dos números que resulten será el producto pedido* (53).

Supongamos que se quiere multiplicar el número 5 por el número mixto $4+\frac{2}{3}$: reduciendo el número mixto á fraccionario, y efectuando la multiplicacion, se tendrá

$$5\times\left(4+\frac{2}{3}\right)=5\times\frac{14}{3}=\frac{70}{3}=23\,\frac{1}{3}.$$

Sea el nuevo producto $\frac{3}{5}\times\left(4+\frac{2}{3}\right)$, el cual nos dará, siguiendo el mismo método,

$$\frac{3}{5}\times\left(4+\frac{2}{3}\right)=\frac{3}{5}\times\frac{14}{3}=\frac{42}{15}=2\,\frac{12}{15}=2\,\frac{4}{5}.$$

Los dos productos anteriores efectuados directamente ó sea por el segundo método, nos dan

$$1.^{\circ}\ 5\times\left(4+\frac{2}{3}\right)=20+\frac{10}{3}=20+3\,\frac{1}{3}=23\,\frac{1}{3}.$$

$$2.^{\circ}\ \frac{3}{5}\times\left(4+\frac{2}{3}\right)=\frac{12}{5}+\frac{6}{15}=\frac{36}{15}+\frac{6}{15}=\frac{42}{15}=2\frac{4}{5}.$$

Sexto caso. *Para multiplicar un número mixto por otro, se pueden convertir ámbos en números fraccionarios, y queda reducido á multiplicar dos quebrados; ó bien se efectúa la multiplicacion de todo el multiplicando por el entero y quebrado del multiplicador, y sumando los productos parciales que resulten se tiene el producto total* (53).

Sea, por ejemplo, multiplicar $4+\frac{2}{5}$ por $3+\frac{7}{9}$; se tendrá segun el primer método

$$\left(4+\frac{2}{5}\right)\times\left(3+\frac{7}{9}\right)=\frac{22}{5}\times\frac{34}{9}=\frac{22\times 34}{5\times 9}=$$
$$\frac{748}{45}=16\frac{28}{45}.$$

Empleando el segundo método hallaremos

$$\left(4+\frac{2}{5}\right)\left(3+\frac{7}{9}\right)=12+\frac{6}{5}+\frac{28}{9}+\frac{14}{45}=12+\frac{54}{45}+\frac{140}{45}+\frac{14}{45}=$$
$$12+\frac{208}{45}=12+4\frac{28}{45}=16\frac{28}{45}.$$

Division de quebrados, de un entero por un quebrado y de números mixtos.

167. En la division de quebrados se consideran varios casos que pueden reducirse á estos cuatro: 1.°, *dividir un quebrado por un entero;* 2.°, *un entero por un quebrado;* 3.°, *un quebrado por otro;* y 4.°, *un mixto por otro.*

Primer caso. *Para dividir un quebrado por un entero, sabemos puede hacerse de dos modos: ó multiplicando el denominador por el número por que hemos de dividir el quebrado, ó dividiendo el numerador por dicho número entero.*

El primero de estos métodos constituye la regla general, porque siempre es aplicable: el segundo sólo se emplea cuando el número entero por que se quiere dividir el quebrado es un divisor del numerador del mismo; y debe preferirse este segundo método siempre que se pueda aplicar, porque da un resultado más sencillo que el primero.

Propongámonos dividir el quebrado $\frac{3}{5}$ por 4: se tendrá

$$\frac{3}{5} : 4 = \frac{3}{20}.$$

Supongamos ahora que se quiere dividir $\frac{8}{9}$ por 4. Como el numerador 8 es divisible por 4, empleando el segundo método, se tendrá

$$\frac{8}{9} : 4 = \frac{2}{9}.$$

Segundo caso. *Para dividir un entero por un quebrado, se multiplica el entero por el denominador del quebrado, y el producto se parte por el numerador.*

En efecto, siendo la division el análisis de la multiplicacion, y teniendo por objeto hallar uno de los factores de un producto dado éste y el otro factor, y sabiendo ademas que el producto es respecto de uno de los factores lo que el otro es de la unidad; tendremos que el dividendo, que es el producto, será respecto del cociente, número que vamos buscando, lo que el divisor, que es uno de los factores, es respecto de la unidad; luego dividiendo el dividendo por el número de partes que tiene el quebrado divisor ó sea por el numerador de dicho quebrado, el número que nos resulte nos expresará la parte del cociente indicada por el denominador del divisor, y repitiendo ésta tantas veces como unidades tiene el denominador del quebrado divisor, obtendremos el cociente.

Apliquemos este raciocinio á un ejemplo, y sea dividir 8 por $\frac{3}{5}$.

Siendo 8 el producto de $\frac{3}{5}$ por el número que vamos buscando, será respecto de este número lo que $\frac{3}{5}$ es de la unidad; es decir, que el dividendo 8 será *tres veces la quinta parte del cociente;* luego 8 partido por 3, ó sea $\frac{8}{3}$, nos expresará una quinta parte del cociente, y repitiendo esta quinta parte 5 veces, ó lo que es lo mismo, multiplicándola por 5, tendremos el número que se busca; luego

$$8 : \frac{3}{5} = \frac{8 \times 5}{3} = \frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}.$$

Tercer caso. *Para dividir un quebrado por otro, se multiplica el numerador del dividendo por el denominador del divisor, y este producto se parte por el que resulta de multiplicar el denominador del dividendo por el numerador del divisor;* ó más sencillo, *para dividir un quebrado por otro, se multiplica el primero por el segundo invertido.*

Sea, por ejemplo, dividir el quebrado $\frac{3}{5}$ por $\frac{4}{7}$.

Siendo el dividendo $\frac{3}{5}$ respecto del cociente lo que $\frac{4}{7}$ es respecto de la unidad, y por lo tanto 4 veces la *séptima* parte, dividiendo $\frac{3}{5}$ por 4, lo cual nos da (153–2.°) $\frac{3}{5 \times 4}$, obtendremos una séptima parte del cociente; y repitiendo esta séptima parte 7 veces, ó lo que es lo mismo, multiplicándola por 7 tendremos el cociente pedido: así,

$$\frac{3}{5} : \frac{4}{7} = \frac{3 \times 7}{5 \times 4} = \frac{21}{20} = 1\frac{1}{20}.$$

Observacion. Siendo la division el análisis de la multiplicacion, y efectuándose la de los quebrados multiplicando numerador por numerador y denominador por denominador, parecia natural que para dividir una fraccion por otra se dividiesen respectivamente los dos términos de la primera por los de la segunda; y en efecto, ningun inconveniente habria siempre que dichos dos términos de la primera fuesen exactamente divisibles por los de la segunda; pero en el caso de no serlo no tendria ventaja la aplicacion de esta regla, porque la division de las dos fracciones propuestas quedaria reducida á la de otras dos.

CUARTO CASO. *Para dividir un número mixto por otro, se convierten ámbos en fraccionarios y queda reducido á dividir un quebrado por otro.*

Sea, por ejemplo, dividir $3+\frac{2}{5}$ por $4+\frac{7}{8}$: se tendrá

$$\left(3+\frac{2}{5}\right):\left(4+\frac{7}{8}\right)=\frac{17}{5}:\frac{39}{8}=\frac{17\times 8}{5\times 39}=\frac{136}{195}.$$

LECCION XIX.

Producto de varios quebrados. — Quebrados de quebrados. — Reduccion de quebrados á otros que tengan un denominador dado. — Generalizacion de la teoría de quebrados.

Productos de varios quebrados.

168. *El producto de varios quebrados se obtiene multiplicando los numeradores, despues los denominadores y partiendo el primer producto por el segundo.*

Sea el producto $\frac{3}{4}\times\frac{2}{5}\times\frac{4}{9}\times\frac{7}{8}$.

El producto de los dos primeros factores es

$$\frac{3}{4}\times\frac{2}{5}=\frac{3\times 2}{4\times 5}.$$

El de éste por el tercer quebrado es

$$\frac{3\times 2}{4\times 5}\times\frac{4}{9}=\frac{3\times 2\times 4}{4\times 5\times 9},$$

y efectuando el producto del último hallado por el último factor, se tiene

$$\frac{3\times 2\times 4}{4\times 5\times 9}\times\frac{7}{8}=\frac{3\times 2\times 4\times 7}{4\times 5\times 9\times 8};$$

luego $\frac{3}{4}\times\frac{2}{5}\times\frac{4}{9}\times\frac{7}{8}=\frac{3\times 2\times 4\times 7}{4\times 5\times 9\times 8};$

que es lo que se queria demostrar.

OBSERVACIONES. 1.ª Si los factores de un producto son enteros, quebrados y mixtos, despues de convertidos éstos en números fraccionarios, queda reducida la cuestion á multiplicar números enteros y quebrados; y como en la práctica se principia por multiplicar los dos primeros factores, podrá suceder una de estas combinaciones: multiplicar un entero por otro, un entero por un quebrado, un quebrado por un entero ó dos quebrados; y lo mismo sucede en el producto del primero hallado por el tercer factor y en todos los demas. Ahora bien, el producto de un entero por un quebrado ó viceversa, se obtiene multiplicando el numerador del quebrado por el entero y partiendo el producto por el denominador; luego *el producto de varios números enteros y quebrados es igual á una fraccion que tiene por numerador el producto de todos los enteros y numeradores y por denominador el producto de los denominadores.*

2.ª Cuando haya de efectuarse el producto de varios números enteros y quebrados ó de quebrados solamente, conviene indicar primero las operaciones, y ántes de ejecutarlas quitar los factores que haya comunes á los dos términos de la fraccion que expresa el producto.

Sea, por ejemplo, multiplicar

$$\frac{2}{5}\times\frac{7}{9}\times\frac{5}{6}\times 8\times\frac{3}{7}=\frac{2\times 7\times 5\times 8\times 3}{5\times 9\times 6\times 7},$$

cuyo resultado podrá simplificarse quitando primeramente los factores 7 y 5 comunes á los dos términos, y despues los factores 2 y 3 que se hallan en el número 6 del denominador: así, tendremos

$$\frac{2}{5}\times\frac{7}{9}\times\frac{5}{6}\times 8\times\frac{3}{7}=\frac{2\times 7\times 5\times 8\times 3}{5\times 9\times 6\times 7}=\frac{2\times 8\times 3}{9\times 6}=\frac{8}{9}.$$

169. Siendo el producto de varios quebrados ó de varios enteros y quebrados, otro quebrado que tiene por numerador el producto de los numeradores ó el de los enteros y numeradores, y por denominador el de los denominadores, y siendo estos productos siempre los mismos, cualquiera que sea el órden en que se multipliquen, se sigue que *el producto de varios en-*

teros y quebrados ó de quebrados solamente, no varía cualquiera que sea el órden en que se multipliquen estos números.

Observacion. El principio de que el órden de factores no altera el producto que se demostró (56) para el caso de ser enteros dichos factores, ahora queda demostrado para el caso de ser quebrados ó enteros y quebrados; más adelante haremos ver que tambien es verdadero siendo los números inconmensurables.

Quebrados de quebrados.

170. Hemos visto (166) que multiplicar, por ejemplo, $\frac{3}{4}$ por $\frac{2}{5}$ es hallar las *dos quintas partes de tres cuartos*. En esta cuestion nos vemos precisados á tomar de un quebrado una ó más partes de las que indica el denominador de otro, por lo que al resultado se le llama *quebrado de quebrado*.

Tambien se da el nombre de *quebrado de quebrados* al resultado de multiplicar entre sí varios quebrados ó enteros y quebrados; así, los $\frac{2}{5}$ de los $\frac{3}{4}$ de los $\frac{5}{9}$ de 12 será el producto de todos estos números, es decir,

$$\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{9}\times 12=\frac{2\times 3\times 5\times 12}{5\times 4\times 9}=\frac{2\times 12}{4\times 3}=2.$$

Reduccion de quebrados á otros que tengan un denominador dado.

171. *Para convertir un quebrado irreducible en otro que tenga un denominador* n, *se multiplica el numerador por* n, *el producto se parte por el denominador, y poniendo por denominador el número* n *al cociente entero que resulte, se tendrá el quebrado pedido.*

Sea el quebrado irreducible $\frac{a}{b}$ que se quiere convertir en otro que tenga el denominador n. Pudiéndose considerar á todo quebrado (147) como el cociente de la division del numerador por el denominador, se tendrá que dividiendo cada unidad del dividendo, no en tantas partes como unidades tiene el divisor, sino en n, el cociente obtenido podrá no ser exacto, pero será un cierto número de *enésimas* partes de la unidad que expresará el valor del quebrado propuesto con un error más pequeño que una *enésima* parte; de modo que llamando q al cociente entero de dividir an por b, el quebrado propuesto será, si la division hecha no es exacta, mayor que $\frac{q}{n}$ y menor que $\frac{q+1}{n}$; luego el error que se comete, tomando uno cualquiera de estos dos quebrados por el propuesto, será menor que la diferencia que hay entre ellos, ó lo que es lo mismo menor que $\frac{1}{n}$.

CONSECUENCIA. Dado un quebrado irreducible cuyos términos sean tan grandes que no nos podamos formar una idea clara de su valor, se reduce á otro cuyo denominador sea un número determinado n, y de este modo podremos conocer su valor aproximado en ménos de $\frac{1}{n}$.

Sea el quebrado $\frac{677}{977}$ que nos expresa 677 partes de la unidad dividida en 977: reduciendo este quebrado á otro que tenga 12 por denominador, se tendrá que el producto de 677 por 12 es 8124, y el cociente entero de dividir este producto por 977 es 8; luego el quebrado propuesto está comprendido entre $\frac{8}{12}$ y $\frac{9}{12}$ ó sea entre $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{4}$; por consiguiente al tomar uno de estos quebrados por el propuesto se comete un error menor que $\frac{1}{12}$.

Generalizacion de la teoría de quebrados.

172. Siendo el quebrado lo que resulta de medir una cantidad con una unidad mayor que ella, y expresando la relacion que hay entre el número de partes iguales en que se divide la unidad y el que de éstas contiene la cantidad, se deduce que los dos términos que forman el quebrado son por su naturaleza números enteros. Tambien hemos visto (147) que puede considerarse al quebrado como el cociente de la division de dos números enteros, cuando dicha division no se puede efectuar exacta-

mente en unidades enteras, obteniéndose en este caso el quebrado, dividiendo cada unidad del dividendo en tantas partes como unidades tiene el divisor, y efectuando la division del número que resulta por dicho divisor; por consiguiente tambien en este caso son enteros los dos términos del quebrado; luego segun la definicion de número quebrado y modo de obtenerlo debe estar expresado por la relacion de dos números enteros. Sin embargo, se acostumbra á llamar en general número quebrado ó fraccion al cociente de dos números cualesquiera, ya sean enteros, quebrados, mixtos ó inconmensurables, y entónces no debemos considerarle como el número que expresa parte ó partes de la unidad, sino como el cociente de la division indicada de dichos dos números. Considerando, pues, á las fracciones no como el número que expresa parte ó partes de la unidad, en cuyo caso sus dos términos son, segun hemos visto, números enteros, sino como el cociente indicado de dos números cualesquiera, debemos justificar todas las reglas que se han dado hasta aquí, que sólo son aplicables cuando los términos de la fraccion son números enteros.

173. Sea la fraccion en general $\frac{a}{b}$, que podrá tener sus términos enteros, quebrados, mixtos ó inconmensurables, y por lo tanto expresar cualquiera de las siguientes:

$$\frac{3}{4},\ \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}},\ \frac{2\frac{2}{3}}{3\frac{3}{4}}=\frac{\frac{8}{3}}{\frac{15}{4}},\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

Las fracciones consideradas de este modo general, no se leen de la misma manera que aquellas cuyos términos son enteros, sino expresando la division indicada: así las fracciones anteriores cuyos términos no son enteros se leen *dos tercios partido por cuatro quintos*, *dos y dos tercios partido por tres y tres cuartos*, *raiz de dos partido por raiz de tres*.

174. Las alteraciones que experimenta un quebrado cualquiera segun las que sufren sus términos se deducen por las que experimenta un cociente segun las que sufren dividendo y divisor; y como ya hemos visto de un modo general (LEC. VII) cuá-

les son estas alteraciones, podremos decir que *cuando se multiplica ó divide el numerador de un quebrado por un número cualquiera, el quebrado viene multiplicado ó partido por el mismo número; cuando se multiplica ó parte el denominador de un quebrado por un número cualquiera, el quebrado viene partido ó multiplicado por el mismo número; cuando se multiplican ó parten los dos términos de un quebrado por un mismo número, el quebrado no se altera.*

De estas alteraciones se deducen las reglas para multiplicar ó partir un quebrado por un número cualquiera y para simplificar los quebrados y reducirlos á un comun denominador, cuyas reglas están enteramente conformes con las que hemos dado en el caso de ser enteros los términos del quebrado.

Vistas ya las alteraciones que experimenta un quebrado segun las que sufren sus términos, pasemos al cálculo de las cuatro operaciones.

175. *Para sumar quebrados en general, se reducen á un comun denominador, si no le tienen, se suman los numeradores y al resultado se le pone por denominador el denominador comun.*

Sean las fracciones que se han de sumar $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ y $\frac{f}{g}$.

Reduciéndolas á un comun denominador, se tendrá

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{f}{g}=\frac{adg}{bdg}+\frac{cbg}{bdg}+\frac{fbd}{bdg},$$

y como el cociente de una suma es igual á la suma de los cocientes de los sumandos (55) y recíprocamente, se tendrá

$$\frac{adg}{bdg}+\frac{cbg}{bdg}+\frac{fbd}{bdg}=\frac{adg+cbg+fbd}{bdg},$$

que es lo que se queria demostrar.

176. Análogamente se prueba que *para restar dos fracciones en general, se reducen á un comun denominador, se restan los numeradores y á la resta se le pone por denominador el denominador comun.*

Así, $$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}-\frac{cb}{bd}=\frac{ad-cb}{bd}.$$

177. *Para multiplicar dos fracciones se multiplican los numeradores y su producto se parte por el de los denominadores.*

Sean las fracciones que se han de multiplicar $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$. Representando por q y q' los valores respectivos de cada una, se tendrá

$$\frac{a}{b}=q,\ \frac{c}{d}=q',\ \text{de donde}\ \frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=qq'.$$

De la primera igualdad se deduce $a=bq$; de la segunda $c=dq'$; y multiplicando estas dos, tenemos la igualdad

$$ac=bq\times dq',$$

que dividida por b y luégo por d, nos da

$$\frac{ac}{bd}=qq';$$

pero

$$qq'=\frac{a}{b}\times\frac{c}{d};$$

luego

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd},$$

que es lo que se queria demostrar.

178. *Para dividir dos fracciones se multiplica la primera por la segunda invertida;* ó lo que es lo mismo, *el producto del numerador del dividendo por el denominador del divisor, partido por el que resulta de multiplicar el denominador del primer quebrado por el numerador del segundo, nos expresa el cociente de las dos fracciones.*

Sea la division de $\frac{a}{b}$ por $\frac{c}{d}$: representemos como ántes por q y q' los valores respectivos de estas fracciones, y tendremos

$$\frac{a}{b}=q,\ \frac{c}{d}=q'\ \text{y}\ \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{q}{q'}.$$

De las primeras igualdades se deducen las siguientes:

$$a=bq$$
$$c=dq'.$$

Multiplicando la primera por d, y la segunda por b, obtendremos

$$ad = bdq$$
$$cb = bdq';$$

partiendo la primera de estas últimas por la segunda, y simplificando, se tiene

$$\frac{ad}{cb} = \frac{bdq}{bdq'} = \frac{q}{q'};$$

pero $\frac{q}{q'} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d}$; luego $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{cb}$,

que es lo que se queria demostrar.

179. Segun las definiciones que hemos dado de múltiplo y divisor de un número, vemos que puede haber múltiplos y divisores de fracciones: así, el múltiplo de una fraccion es lo que resulta de multiplicar dicha fraccion por un número entero, y submúltiplo ó divisor de una fraccion es el número entero ó fraccionario que divide exactamente á la fraccion dando por cociente un número entero.

La fraccion $\frac{12}{13}$ es un múltiplo de $\frac{2}{13}$, puesto que resulta de multiplicar la segunda por 6. Recíprocamente, $\frac{2}{13}$ es un divisor ó submúltiplo de $\frac{12}{13}$, porque el cociente de dividir la segunda por la primera es el número entero 6.

Esto supuesto, veamos las condiciones á que debe satisfacer un quebrado irreducible $\frac{m}{n}$ para que divida exactamente ó sea un divisor de otro tambien irreducible $\frac{a}{b}$.

Si el cociente de la division de la segunda por la primera fraccion ha de ser entero, representándole por Q se tendrá

$$\frac{a}{b} : \frac{m}{n} = \frac{an}{bm} = Q.$$

Siendo b primo con a, y m con n, es necesario, para que el cociente Q sea entero, que b y m sean respectivamente divisores de n y a; por consiguiente, *para que un quebrado* $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}}$ *divida á otro, siendo ámbos irreducibles, es necesario que su numerador* m *sea un divisor del numerador del que ha de ser divisible, y su denominador* n *un múltiplo del denominador.*

Y recíprocamente, *para que un quebrado sea múltiplo de otro, es necesario que su numerador lo sea del numerador del segundo quebrado, y que su denominador sea un divisor del denominador.*

Donde vemos que un quebrado puede tener un número infinito de divisores, lo cual no se verifica en los números enteros.

Lo mismo que los números enteros, pueden tener las fracciones múltiplos y divisores comunes; de modo que se podrá proponer el problema de hallar el máximo comun divisor ó el mínimo comun múltiplo de dos ó más fracciones.

180. *Para hallar el* m . c . d . *de dos ó más fracciones, se determina el* m . c . d . *de los numeradores y el* m . c . m . *de los denominadores, se parte el primer número por el segundo, y la fraccion que resulte será el* m . c . d . *pedido.*

Sean las fracciones cuyo máximo comun divisor queremos hallar $\frac{a}{a'}$, $\frac{b}{b'}$ y $\frac{c}{c'}$. Representemos por D el *m . c . d .* de los numeradores a, b, c; y por M el *m . c . m .* de los denominadores a', b', c'; y vamos á demostrar que $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{M}}$ es el máximo comun divisor de las fracciones propuestas.

La fraccion que ha de dividir exactamente á las propuestas ha de tener por numerador un número que divida á cada uno de los numeradores de dichas fracciones (179), y por lo tanto ha de ser un divisor comun de todos los numeradores. El denominador ha de ser múltiplo de cada uno de los denominadores, y por consiguiente un múltiplo comun de ellos; pero de las fracciones que cumplen con estas condiciones, la mayor es la que teniendo el mayor numerador posible, tiene menor denominador; luego la fraccion $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{M}}$ es la mayor que divide á las fracciones propuestas.

Observacion. Este problema puede tambien resolverse por el método de las divisiones sucesivas (106); porque el principio en que se funda es verdadero, ya sean los números enteros ó quebrados. El único inconveniente que se presentará es que las divisiones que hay que practicar serán un poco más pesadas; pero reduciendo los quebrados, cuyo *m . c . d .* queremos hallar, á un comun denominador, se simplifican mucho los cálculos, y podremos llegar con facilidad á obtener el resultado pedido.

Ejemplo. Sea hallar el *m . c . d .* de los quebrados $\frac{3}{4}$, $\frac{6}{7}$ y $\frac{9}{14}$.

Por el primer método se halla que el *m . c . d .* de los numeradores es 3; el *m . c . m .* de los denominadores es 28; luego el *m . c . d .* pedido será $\frac{3}{28}$.

Empleando el método de las divisiones sucesivas, tendremos que hallar primeramente el *m . c . d .* de los dos primeros quebrados, los cuales, reducidos á un comun denominador, serán $\frac{21}{28}$ y $\frac{24}{28}$.

Dividiendo el mayor por el menor, como se ve (167 *obs.*),

$$\begin{array}{c|c|c}
\frac{24}{28} & \frac{21}{28} & \frac{3}{28} \\
\cline{2-3}
 & 1 & 7 \\
\frac{3}{28} & 0 &
\end{array}$$

hallamos el cociente 1 y el resto $\frac{3}{28}$; y como el *m . c . d .* del dividendo y divisor es igual al del divisor y resto, dividiendo el divisor por el resto, resulta que $\frac{3}{28}$ divide exactamente á $\frac{21}{28}$; luego $\frac{3}{28}$ es el *m . c . d .* de los dos primeros quebrados.

Hallando por el mismo procedimiento el *m . c . d .* de $\frac{3}{28}$ y del tercer quebrado, veremos que es tambien $\frac{3}{28}$; luego este quebrado es el *m . c . d .* de los tres propuestos.

181. *Para hallar el mínimo comun múltiplo de dos ó más fracciones, se determina el* m . c . m . *de los numeradores, y el* m . c . d . *de los denominadores, se parte el primer número por el segundo, y la fraccion que resulte será el* m . c . m . *pedido.*

Sean las fracciones cuyo mínimo comun múltiplo queremos hallar $\frac{a}{a'}$, $\frac{b}{b'}$ y $\frac{c}{c'}$; representemos por M el *m . c . m .* de los numeradores *a, b, c;* y por D el *m . c . d .* de los denominadores *a', b', c';* y vamos á demostrar que $\frac{M}{D}$ es el mínimo comun múltiplo de las fracciones propuestas.

En efecto, debiendo dividir exactamente cada una de los fracciones propuestas á la que vamos buscando, es necesario (179) que los numeradores de aquellas sean divisores del numerador de ésta, y sus denominadores múltiplos del denominador, y por consiguiente el numerador de la fraccion que se busca ha de ser múltiplo comun de todos los numeradores de las propuestas, y el denominador un divisor comun de los denominadores; pero de todas las fracciones que cumplen con estas condiciones, la menor es la que teniendo menor numerador tiene mayor denominador; luego la fraccion que tiene por denominador el *m . c . d.* de los denominadores de las propuestas, y por numerador el *m . c . m .* de los numeradores será el *m . c . m .* pedido.

Ejemplo. Sea hallar el mínimo comun múltiplo de los quebrados $\frac{3}{7}$, $\frac{6}{27}$ y $\frac{9}{14}$.

El *m . c . m .* de los numeradores es 18; el *m . c . d .* de los denominadores es 7; luego el *m . c . m .* de los quebrados propuestos será $\frac{18}{7}$.

De las fracciones decimales.

LECCION XX.

Fracciones decimales, su numeracion. — Alteraciones que experimenta una decimal cuando se añaden ó quitan ceros á su derecha, y cuando se corre la coma á derecha ó izquierda. — Adicion de fracciones decimales. — Sustraccion de fracciones decimales. — Multiplicacion de las fracciones decimales. — Division de las fracciones decimales.

Fracciones decimales, su numeracion.

182. Hemos visto (145) que cuando se trata de medir una cantidad con una unidad mayor que ella, se divide ésta en un cierto número de partes tales que una de ellas esté contenida exactamente en la cantidad que se quiere medir, y si dicha cantidad es *conmensurable* se obtiene un número quebrado que nos representa su valor. El número de partes en que se divide la unidad para obtener el quebrado no tiene que satisfacer á más condicion que á la de estar contenida exactamente una de estas partes en la cantidad que se mide; pero si en vez de dividir la unidad en un número cualquiera de partes, la dividiésemos en 10, 100, 1000 ..., entónces los quebrados que nos expresan exacta ó aproximadamente el valor de la cantidad, toman el nombre de *quebrados ó fracciones decimales.*

Desde luégo se comprende que empleando la ley decimal en las divisiones y subdivisiones de la unidad, no siempre se podrá expresar exactamente el valor de cantidades que apreciadas por quebrados ordinarios podria hacerse con exactitud; pero en cambio las fracciones decimales que resultan tienen la ventaja de poderse escribir sin necesidad de denominador, y reducir su cálculo al de los números enteros.

183. Del mismo modo que se puede expresar el valor de una cantidad por muy grande que sea, formando unidades que vayan siendo de 10 en 10 veces mayores, podremos tambien expresar el de otra por muy pequeña que sea, formando tambien unidades que vayan siendo de 10 en 10 veces menores; de modo que estas dos series de unidades que partiendo del mismo orígen, que

es la unidad, van en sentido ascendente y descendente, forman el *sistema decimal*, del cual sólo hemos explicado (LEC. I) una parte, que es la que corresponde á los múltiplos de la unidad. Para obtener la correspondiente á los divisores, se supone la unidad dividida en 10 partes iguales llamadas *décimas*, cada décima en otras 10 llamadas *centésimas*, cada centésima en 10 *milésimas*, y continuando de este modo se obtiene un número indefinido de órdenes de unidades, que corresponden perfectamente á los considerados en el sistema ascendente, y cuyos nombres se derivan de los de éstos con sólo terminarles en *ésimas:* así la unidad de *quinto* órden que es *decena de millar* ó *diez mil* corresponde á la de *quinto* órden *decimal* que es *diez milésima*, la unidad del órden *trece* que es el *billon* corresponde á la unidad del órden *trece decimal*, que es la *billonésima*.

Observando que cada unidad de un órden decimal se forma de 10 del inmediato inferior, podremos escribir las fracciones decimales sin necesidad de ponerles denominador, haciendo uso del valor relativo de las cifras; así, la primera que esté á la derecha de las unidades expresará *décimas*, la segunda *centésimas*, la tercera *milésimas*, y en general una cifra cualquiera expresará el órden que marque el número de cifras que hay desde ella hasta las unidades inclusive; por tanto, una cifra que ocupe, á contar desde las unidades, el lugar *once* á la derecha, expresará *diez mil millonésimas*.

En la escritura de decimales debemos distinguir dos casos: 1.°, que se den los enteros que contenga el número, y luégo las decimales; 2.°, que enteros y decimales se den juntos.

184. *Para escribir números en los que se dan los enteros separados de las decimales, se escriben primero los enteros, y despues el número que expresa la parte decimal, teniendo cuidado que la última cifra ocupe el lugar que le corresponda, y de separar con una coma los enteros de las decimales.*

EJEMPLO 1.° Escribir el número 357 *enteros*, 3874 *cien milésimas*.

Como las *cien milésimas* ocupan el sexto lugar á contar desde las unidades, el 4 deberá ocupar el sexto lugar; luego el número escrito en cifra será

357,03874.

EJEMPLO 2.° Escribir el número 0 *enteros*, 3507 *millonésimas*.
El resultado será 0,003507.

185. *Para escribir un número cuando el entero se da reunido con la decimal, se escribe el número dado como si fuese entero y se pone despues la coma de modo que la última cifra ocupe el lugar que le corresponda por su denominacion.*

Sea el número 3578 *milésimas*.

Como las *milésimas* han de ocupar el *cuarto* lugar, se tendrá que poner la coma entre el 3 y el 5; de manera que el número será

3,578.

Del mismo modo se verá que el número 8407 *diez milésimas* se escribirá así

0,8407;

y que 327 *millonésimas* se escribirá del modo siguiente:

0,000327.

186. *Para leer un número decimal, se lee primero el entero y despues el número decimal como si tambien fuese entero, dándole la denominacion que á su última cifra corresponda.*

Sea el número 34,789, el cual se leerá diciendo 34 *enteros* 789 *milésimas*. O si se quiere, uniendo los enteros á las decimales, se podrá leer 34785 *milésimas*.

Alteraciones que experimenta una decimal cuando se añaden ó quitan ceros á su derecha, y cuando se corre la coma á la derecha ó izquierda.

187. Dependiendo el valor relativo de las cifras del lugar que ocupan con relacion á la de las unidades, una de aquellas que ocupe el *tercer* lugar, por ejemplo, siempre expresará *centésimas*, y por consiguiente su valor no cambiará cualquiera que sea el número de ceros que se le ponga ó quite á su derecha; es verdad que todo el número que expresa la decimal se habrá hecho 10, 100, 1000, etc. veces mayor ó menor poniendo ó quitando á su derecha *uno*, *dos*, *tres*, etc. ceros; pero tambien es cierto que las unidades que representa el número en este

caso, será el mismo número n de veces *menor* ó mayor que las que ántes expresaba la decimal; luego *una decimal no se altera poniendo ó quitando ceros á su derecha.*

188. *Si en una decimal se corre la coma á derecha ó izquierda uno, dos, tres, etc. lugares, dicha decimal queda multiplicada ó partida por la unidad seguida de tantos ceros como lugares se corrió la coma.*

En efecto, al correr la coma á la derecha uno, dos, tres, etc. lugares, cada cifra pasa á representar un órden de unidades que es tantas veces mayor como expresa la unidad seguida de tantos ceros como lugares se corrió la coma; y por el contrario, corriéndola hácia la izquierda, cada cifra expresa un órden de unidades que es tantas veces menor como indica la unidad seguida de tantos ceros como lugares se corrió; luego el número queda multiplicado ó partido por la unidad seguida de uno, dos ó más ceros corriendo la coma á la derecha ó izquierda uno, dos ó más lugares; que es lo que se queria demostrar.

Adicion de fracciones decimales.

189. Escribiéndose las fracciones decimales lo mismo que los números enteros y componiéndose cada unidad de un órden cualquiera de *diez* de la inmediata inferior, podrá efectuarse la adicion de estas fracciones lo mismo que en los números enteros. Así, diremos que

190. *Para sumar fracciones decimales, se escriben los sumandos los unos debajo de los otros de modo que se correspondan las unidades de igual órden, para lo cual basta que las comas estén en línea vertical, en seguida se suman como los enteros y se pone despues la coma en el lugar correspondiente.*

Supongamos que se han de sumar los números 3,47; 12,7; 0,187 y 34,703.

$$\begin{array}{r} 3,470 \\ 12,700 \\ 0,187 \\ 34,703 \\ \hline 51,060 \end{array}$$

Despues de colocados los sumandos unos debajo de otros de modo que se correspondan las comas, conviene, para evitar equivocaciones, igualar con ceros el número de cifras decimales; en seguida sumando como enteros y colocando la coma en su lugar, se obtiene la suma $51,060 = 51,06$.

Sustraccion de las fracciones decimales.

191. *Para restar decimales se escribe el minuendo y debajo el sustraendo de modo que se correspondan las comas, se iguala con ceros el número de cifras decimales y se restan como enteros, poniendo la coma en su lugar.*

Sea, por ejemplo, restar 37,43 de 57,3. Dispuesta la operacion como se ve, se tendrá

$$\begin{array}{r} 57,30 \\ 37,43 \\ \hline 19,87 \end{array}$$

Propongámonos, en segundo lugar, restar 123,47 de 347.

$$\begin{array}{r} 347,00 \\ 123,47 \\ \hline 223,53 \end{array}$$

Vemos que siendo el minuendo, en este ejemplo, un número entero, y el sustraendo entero y decimal, ha sido necesario poner dos ceros en el lugar de las decimales; restando despues como en los números enteros, hemos obtenido el número 223,53.

Multiplicacion de las fracciones decimales.

192. En la multiplicacion de decimales distinguiremos varios casos: 1.°, *multiplicar una decimal por la unidad seguida de ceros;* 2.°, *multiplicar una decimal por un número entero;* y 3.°, *multiplicar una decimal por otra.*

193. *Para multiplicar una decimal por la unidad seguida de ceros, se corre la coma á la derecha tantos lugares como ceros tiene la unidad.*

En efecto, hemos visto (188) que corriendo la coma á la derecha un cierto número de lugares, queda la decimal multiplicada por la unidad seguida de tantos ceros como lugares se corrió la coma.

Así, $3,468 \times 100 = 346,8$ y $3,24 \times 1000 = 3240$.

194. *Para multiplicar una decimal por un número entero, se prescinde de la coma y se efectúa el producto de los dos números como si fuesen enteros; despues se separan á la derecha del producto tantas cifras decimales como tiene el multiplicando, poniendo ceros á la izquierda si fuese necesario.*

Supongamos que se trata de multiplicar 3,476 por 84: se dispondrá la operacion del modo siguiente:

$$\begin{array}{r} 3,476 \\ 84 \\ \hline 13\,904 \\ 278\,08 \\ \hline 291,984 \end{array}$$

Al prescindir de la coma en el multiplicando, le hemos multiplicado por la unidad seguida de tres ceros, y por lo tanto el producto obtenido vendrá multiplicado por el mismo número (58); pero al separar á la derecha de este producto tres cifras decimales, le hemos dividido por la unidad seguida de tres ceros (188); luego el número hallado 291,984 es el producto pedido.

Sea, en segundo lugar, el producto de 0,0032 por 8.

Efectuada la multiplicacion como si ámbos fuesen enteros, se tiene

$$\begin{array}{r} 32 \\ 8 \\ \hline 256 \end{array}$$

Para obtener el verdadero producto tenemos que separar á la derecha cuatro cifras decimales; pero como no hay más que tres, será necesario poner ceros á la izquierda, lo que nos da el producto 0,0256.

195. *Para multiplicar una decimal por otra, se prescinde de las comas y se multiplican como enteros, despues se separan*

de la derecha del producto tantas cifras decimales como hay en ámbos factores, poniendo ceros á la izquierda si fuese necesario.

Supongamos que se trata de multiplicar 3,47 por 2,5; se dispondrá la operacion así:

$$\left.\begin{array}{r} 347 \\ 25 \\ \hline 1735 \\ 694 \\ \hline 8675 \end{array}\right\} \; 3,47 \times 2,5 = 8,675.$$

Al suprimir la coma en ámbos factores les hemos multiplicado respectivamente por la unidad seguida de *dos* y *un* ceros, y por consiguiente el producto 8675 viene multiplicado (59) por la unidad seguida de tres ceros; luego separando á la derecha de este producto tres cifras decimales, tendrémos (188) el producto verdadero 8,675.

Sea, en segundo lugar, el producto de 2,032 por 0,0016.

Dispuesta la operacion como anteriormente, resulta:

$$\left.\begin{array}{r} 2032 \\ 16 \\ \hline 12192 \\ 2032 \\ \hline 32512 \end{array}\right\} \; 2,032 \times 0,0016 = 0,0032512.$$

En este ejemplo vemos que debiendo separar del producto de los dos números considerados como enteros, tantas cifras decimales como tienen ámbos factores, y no habiendo en dicho producto bastantes cifras, ha sido necesario poner ceros á la izquierda, obteniendo el resultado 0,0032512.

196. El producto de varias fracciones decimales se obtiene, como el de los números enteros, multiplicando las dos primeras, despues el producto obtenido se multiplica por la tercera, éste por la cuarta, y así sucesivamente hasta multiplicar por la última decimal; el último producto hallado será el de todas las decimales.

Desde luégo se comprende que este producto se obtendrá multiplicando las decimales como si fuesen enteros, y separando despues con una coma tantas cifras decimales como hay en todos los factores. De donde se deduce *que el resultado final siempre será el mismo, cualquiera que sea el órden en que se hayan multiplicado dichas fracciones.*

Division de fracciones decimales.

197. En la division de decimales distinguiremos varios casos: 1.°, *dividir una decimal por la unidad seguida de ceros;* 2.°, *dividir una decimal por un número entero;* 3.°, *dividir un entero por una decimal;* y 4.°, *dividir una decimal por otra.*

198. *Para dividir una decimal por la unidad seguida de ceros, se corre la coma á la izquierda tantos lugares como ceros tiene la unidad.*

Supongamos que se trata de dividir 345,72 por 100. Corriendo la coma á la izquierda dos lugares se tendrá el cociente (188): así,

$$345{,}72 : 100 = 3{,}4572.$$

199. *Para dividir una decimal por un número entero, se prescinde de la coma en el dividendo, y se divide como si fuesen enteros; despues se separan á la derecha del cociente tantas cifras decimales como hay en el dividendo, poniendo ceros á la izquierda si fuese necesario.*

Sea, por ejemplo, dividir 82,35 por 5: efectuando esta division como si ámbos fuesen enteros, se halla por cociente 1647; luego se tendrá

$$82{,}35 : 5 = 16{,}47.$$

Al prescindir de la coma en el dividendo le hemos multiplicado por 100, y por consiguiente el cociente que resulta viene multiplicado por el mismo número (69); pero al separarle á la derecha dos cifras decimales, le hemos dividido por 100; luego 16,47 es el cociente pedido.

200. *Para dividir un entero por una decimal, ó una decimal por otra, se prescinde de la coma en el divisor, se corre á la derecha la del dividendo tantos lugares como decimales tiene aquel, añadiendo ceros si fuese necesario, y queda reducida la operacion á dividir una decimal por un entero, ó un entero por otro.*

En efecto, al quitar la coma en el divisor y correr la del dividendo tantos lugares como decimales tiene dicho divisor, hemos multiplicado ámbos términos por un mismo número, y sabemos (74-3.°) que esto no altera el cociente.

Sea, por ejemplo, dividir 23,468 por 12,56: se tendrá

$$23,468 : 12,56 = 2346,8 : 1256;$$

hecha la division se halla 1,8 de cociente y 86 enteros de resto.

201. Si las divisiones que se hacen con las decimales no son exactas, el cociente que se obtiene por las reglas dadas anteriormente, se diferencia del verdadero en ménos de una unidad del último órden del dividendo, despues de haber corrido la coma tantos lugares como decimales tiene el divisor.

En el ejemplo anterior, el cociente 1,8 se diferencia del verdadero en ménos de una décima.

LECCION XXI.

Reduccion de quebrados á fracciones decimales. — Reduccion de decimales á quebrados ordinarios.

Reduccion de quebrados á fracciones decimales.

202. Hemos visto (171) que para reducir un quebrado á otro que tenga un denominador dado *n*, se multiplica el numerador por dicho número *n*, y el cociente entèro de dividir este producto por el denominador nos expresa exacta ó aproximadamente el valor del quebrado en *enésimas* partes de la unidad. Aplicando, pues, esta regla podremos expresar exacta ó aproximadamente el valor de un quebrado por una decimal, haciendo *n* igual á la unidad seguida de un cierto número de ceros.

Sea la fraccion $\frac{37}{125}$ cuyo valor queremos obtener en *milésimas*.

Multiplicando 37 por 1000 y partiendo el producto por 125, el cociente entero nos expresará el valor pedido; pero el cociente de dividir 37000 por 125 es 296; luego la fraccion propuesta es exactamente igual á 296 *milésimas*, ó lo que es lo mismo á 0,296.

Si quisiéramos expresar la fraccion $\frac{3}{7}$ en *centésimas*, tendriamos que multiplicar por 100 el numerador 3, el producto 300 partirlo por 7, y el cociente seria el número de centésimas equivalente al valor de la fraccion propuesta.

Hecha la division hallamos 42 de cociente y 6 de resto; luego la fraccion propuesta está comprendida entre 42 y 43 *centésimas*, y por consiguiente tomando uno de estos números por el valor de dicha fraccion, cometemos un error menor que una centésima; por lo que se dice que el valor de $\frac{3}{7}$ en ménos de una centésima es 0,42 ó 0,43.

En la práctica se reduce la regla anterior á la siguiente:

203. *Para reducir un quebrado ordinario á decimal, se divide el numerador por el denominador, y el cociente entero que se halle será la parte entera de la decimal; se pone la coma en el cociente, y en seguida por cada cifra decimal que se quiera hallar se escribe un cero á la derecha del residuo anterior.*

Sea $\frac{22}{8}$ la fraccion que hemos de convertir en decimal.

Puesto que toda fraccion se puede considerar como el cociente de dividir el numerador por el denominador, efectuaremos esta division en lo que sea posible, y tendremos

$$\begin{array}{r|l} 22 & 8 \\ \hline 60 & 2,75 \\ 40 & \\ 0 & \end{array}$$

El cociente entero de dividir 22 por 8 es 2; luego 2 es la parte entera de la decimal que separaremos con una coma: esta division da 6 de resto, de modo que reduciéndole á décimas, se tendrán 60, puesto que cada unidad tiene 10 décimas. Dividiendo 60 por 8 tendremos 7 décimas de cociente y 4 de residuo, el cual convertido en centésimas nos da 40. Efectuando la division de 40 por 8 se halla el cociente exacto 5; luego la fraccion propuesta es equivalente á la decimal 2,75.

Si no hubiésemos hallado cociente exacto, podriamos haber obtenido tantas cifras decimales como quisiéramos, prolongando esta operacion suficientemente.

Supongamos que se quiere convertir en decimal la fraccion $\frac{3}{7}$. Aplicando la regla anterior, se tiene

$$\begin{array}{l|l} 30 & 7 \\ \cline{2-2} \;\; 20 & 0,428571\ldots \\ \;\;\;\; 60 & \\ \;\;\;\;\;\; 40 & \\ \;\;\;\;\;\;\;\; 50 & \\ \;\;\;\;\;\;\;\;\;\; 10 & \\ \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\; 3 & \end{array}$$

En este ejemplo se ve que despues de haber hallado seis cifras decimales, hemos obtenido un resto igual al numerador de la fraccion propuesta; de modo que si continuásemos la operacion, iriamos obteniendo los mismos dividendos que anteriormente y por lo tanto las mismas cifras en el cociente, dando orígen á una fraccion decimal de un número ilimitado de cifras, las cuales se repiten periódicamente de seis en seis.

204. El ejemplo anterior justifica lo que dijimos al principio de las fracciones decimales: *que no se puede expresar siempre en decimales el valor de cantidades conmensurables;* y por consiguiente *que no es siempre posible hallar en decimales el valor exacto de un quebrado ordinario*. En efecto, el valor del quebrado $\frac{3}{7}$ convertido en decimal, nos da una fraccion de infinito número de cifras, y como de éstas no podemos tomar sino un número limitado, de aquí que no exprese exactamente el valor del quebrado propuesto; pero á medida que se tome mayor número de cifras decimales, el error que se comete va siendo cada vez más pequeño, y puede ser menor que cualquier cantidad dada. Por tanto el quebrado propuesto se puede considerar como el límite hácia el cual se va aproximando la fraccion decimal á medida que aumenta el número de sus cifras.

205. Las fracciones decimales pueden tener, segun hemos visto, un número de cifras limitado ó ilimitado: en el primer caso

se llaman fracciones decimales *exactas*, y en el segundo *inexactas*.

Las fracciones inexactas, ó sean las que tienen un número ilimitado de cifras, pueden ser de dos clases: *periódicas* y *no periódicas*.

Fraccion *periódica* es aquella en la cual un cierto número de cifras llamado *período*, se repite indefinidamente. Si el período principia en las décimas, la fraccion se llama *periódica pura;* y si principia en cualquier otra cifra, la fraccion se llama *periódica mixta*.

Fraccion no periódica es aquella que teniendo un número ilimitado de cifras, no se repiten periódicamente.

206. *Toda fraccion irreducible cuyo denominador no contiene más factores primos que el 2 y 5, ó úno de ellos, convertida en decimal, da una fraccion decimal exacta.*

Sea la fraccion irreducible $\frac{a}{b}$ cuyo denominador b sólo contiene los factores primos 2 y 5, y que por consiguiente será de la forma

$$b = 2^m \times 5^n.$$

Para convertir esta fraccion ordinaria en una decimal que tenga un cierto número p de cifras decimales, tendremos que multiplicar (171) el numerador a por $10^p = 2^p \times 5^p$, y despues hacer la division del producto $a \times 10^p$ por el denominador b; si esta division es exacta, es claro que la fraccion decimal obtenida expresará el valor exacto de la fraccion propuesta $\frac{a}{b}$.

Ahora bien, como p es un número indeterminado, lo haremos igual al mayor de los exponentes del 2 ó 5, de modo que suponiendo que m sea mayor que n, en cuyo caso será $m = n + d$, siendo d la diferencia que hay entre n y m, haremos

$$p = m = n + d;$$

y se tendrá, indicando la division,

$$\frac{a \times 10^p}{b} = \frac{a \times 10^m}{2^m \times 5^n} = \frac{a \times 2^m \times 5^m}{2^m \times 5^n};$$

simplificando ahora esta fraccion, resultará el número entero

$$\frac{a \times 10^p}{b} = a \times 5^{m-n} = a \times 5^d,$$

el cual nos expresa evidentemente que la fraccion propuesta se ha convertido en una decimal exacta cuyo número de cifras decimales es precisamente igual al mayor de los exponentes del 2 ó 5.

Sea, por ejemplo, la fraccion irreducible $\frac{37}{40}$ cuyo denominador 40 siendo igual á $2^3 \times 5$, no contiene más factores primos que 2 y 5. El mayor de los exponentes de estos factores es 3, por tanto, segun lo dicho anteriormente, la fraccion propuesta se podrá convertir en una decimal exacta que tendrá *tres* cifras decimales, y cuyo valor numérico en unidades del cuarto órden decimal será $37 \times 5^2 = 925$.

En efecto, haciendo todos los cálculos (203), se hallará

$$\frac{37}{40} = 0{,}925.$$

207. *Toda fraccion irreducible cuyo denominador contiene factores primos diferentes de* 2 *y* 5 *convertida en decimal, da una fraccion decimal periódica.*

Sea la fraccion irreducible $\frac{a}{b}$ cuyo denominador b contiene factores distintos de 2 y 5, y vamos á demostrar, primero que la fraccion decimal que resulte no puede ser exacta.

En efecto, habiendo en b un factor por lo ménos diferente de 2 y 5 tal como 7, resulta que el producto $a \times 10^p$ nunca puede ser divisible por el miembro b (136), y no hallando cociente entero exacto en esta division, cualquiera que sea el valor de p, la fraccion $\frac{a}{b}$ no podrá ser representada exactamente por una fraccion decimal; luego dicha fraccion decimal será ilimitada ó, lo que es igual, tendrá un número infinito de cifras.

Probado que la fraccion decimal que resulta se compone de un número infinito de cifras, pasemos á demostrar que dicha fraccion decimal tiene que ser periódica.

Segun el procedimiento que se sigue (203) para convertir un quebrado ordinario en decimal, hemos de dividir el numerador y los restos que se obtengan en las diferentes divisiones parciales seguidos de un cero, por el denominador b. Ahora bien, siendo cada cifra de la decimal el cociente entero que resulta de dividir el resto anterior seguido de un cero por el denominador b, y siendo ademas estas cifras un número ilimitado, el número de dividendos, y por consiguiente el de restos, tiene que ser ilimitado tambien; pero como estos restos son siempre menores que el divisor, cuando hayamos obtenido, á lo más, tantos diferentes como números hay menores que el divisor, que son $b - 1$, el siguiente tiene que ser necesariamente uno de los ya encontrados, el cual podrá ser el primero ú otro cualquiera.

Si es el primer resto el que se repite, poniendo á su derecha un cero, nos dará un nuevo dividendo que será el mismo dividendo que dió la primera cifra decimal, y por consiguiente continuando las operaciones iremos hallando las mismas cifras decimales, las que se irán reproduciendo en el mismo órden hasta volver á encontrar otra vez el mismo primer dividendo, en cuyo caso volverá tambien otra vez á empezar el período, é irá repitiéndose de este modo indefinidamente, dando orígen á una fraccion decimal *periódica pura*.

Si no es el primer resto el que se repite y sí uno de los comprendidos entre el primero y último, tal como el *cuarto*, al escribirle á su derecha un cero, para continuar la operacion, obtendremos un nuevo dividendo parcial que será exactamente igual al cuarto dividendo ya hallado; de modo que efectuando esta division obtendremos el mismo cociente y resto que dió la *cuarta;* por consiguiente las cifras halladas desde la cuarta se repetirán en el mismo órden é indefinidamente, dando orígen á una fraccion decimal periódica *mixta*, que es lo segundo que se debia demostrar.

Consecuencia. *Todo quebrado ordinario convertido en decimal da una fraccion exacta ó periódica.*

Reduccion de decimales á quebrados ordinarios.

208. Reducir una decimal á quebrado ordinario, *es hallar un quebrado que exprese exacta ó aproximadamente el valor de la decimal.*

En la reduccion de decimales á quebrados consideraremos dos casos principales: que la fraccion decimal tenga un número limitado ó ilimitado de cifras.

En el primer caso, podremos siempre hallar un quebrado ordinario equivalente á la fraccion propuesta. En el segundo, el quebrado ordinario que se halla, sólo nos expresa el valor aproximado de la decimal que se nos da, si no es periódica; ó el límite hácia el cual se va aproximando dicha fraccion, si es periódica, á medida que se toma mayor número de cifras ó períodos; de modo que en rigor sólo es equivalente el quebrado hallado á la fraccion decimal, cuando se considera un número infinito de períodos. De aquí se deduce que siendo la fraccion que en este último caso se halla equivalente á la decimal periódica cuyo número de períodos es infinito, dicha fraccion convertida en decimal volverá á dar la propuesta, por cuya razon se le da á aquella el nombre de fraccion *generatriz* de ésta.

209. *Para reducir una decimal exacta ó de un número limitado de cifras á fraccion ordinaria, se pone por denominador al número que expresa la decimal, la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tiene, y el quebrado que resulta, simplificado si es posible, expresa el valor exacto de la fraccion propuesta.*

Sea la fraccion decimal de un número limitado de cifras $n{,}abcd$, y x el valor del quebrado ordinario equivalente á dicha decimal: de modo que tendremos

$$x = n{,}abcd.$$

Multiplicando esta igualdad por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tiene la fraccion dada, se tendrá

$$x \times 10000 = nabcd;$$

de donde se deduce $x = \frac{nabcd}{10000}$, que es lo que se queria demostrar.

210. Si la fraccion que se nos da tiene un número ilimitado de cifras, podrá suceder que éstas se repitan periódicamente ó no. En el primer caso podremos hallar la fraccion ordinaria generatriz que convertida en decimal nos da la propuesta: en el segundo la fraccion decimal nos expresa el valor aproximado de una cantidad inconmensurable, cuya aproximacion será tanto mayor cuanto mayor sea el número de cifras decimales que se consideren.

Por consiguiente, la fraccion ordinaria equivalente á la decimal propuesta sólo expresará exactamente el valor de la cantidad que representa, cuando se tome un número infinito de cifras, lo cual es imposible; luego tomando de la decimal propuesta un cierto número de cifras decimales, y hallando la fraccion ordinaria equivalente (209), obtendremos el valor del número inconmensurable que representa, con un error que será tanto más pequeño cuanto mayor sea el número de cifras decimales que se consideren. Así, las fracciones

$$\frac{31}{10}, \quad \frac{314}{100}, \quad \frac{3141}{1000}, \quad \frac{31415}{10000}, \quad \frac{314159}{100000},$$

expresan valores aproximados del número inconmensurable

$$3,14159265358979 32 \ldots,$$

cuya aproximacion es tanto mayor, cuanto mayor sea el número de cifras decimales que se tomen de la fraccion propuesta.

211. Si la fraccion decimal es periódica, tomando en ella un cierto número de cifras decimales, y convirtiendo la fraccion que resulta en quebrado ordinario, obtendremos, como en el caso anterior, un quebrado que expresará con tanta mayor aproximacion el valor de la fraccion propuesta, cuanto mayor sea el número de cifras que hayamos tomado; pero estas decimales son de tal naturaleza que podremos expresar su valor exacto por una fraccion ordinaria, que como ya sabemos se llama su *generatriz*.

212. *Para convertir el valor exacto de una fraccion deci-*

mal periódica pura, en el de un quebrado ordinario, ó sea para hallar su fraccion GENERATRIZ, *se pone por denominador á la diferencia de la parte entera,* la cual puede ser cero, *seguida de un período y dicha parte entera, tantos nueves como cifras decimales tiene el período; y el quebrado que resulte, simplificado si es posible, expresará el valor exacto de la fraccion dada.*

Sea la fraccion decimal periódica pura $n,abc\ abc...$: representemos por x el valor de la fraccion ordinaria equivalente, ó sea el valor de la fraccion generatriz, y tendremos

$$x = n,abc\ abc\ abc\ abc\ ...$$

Multiplicando esta igualdad por la unidad seguida de tantos ceros como cifras tiene el período, se tendrá la siguiente:

$$1000x = nabc,abc\ abc\ abc\ ...,$$

de la cual restando la primera, y observando que las partes decimales son iguales, porque ámbas se componen de un número ilimitado de períodos, tendremos

$$999x = nabc - n;$$

de donde $$x = \frac{nabc - n}{999},$$

que es lo que se queria demostrar.

Si sólo consideramos de la fraccion propuesta un número limitado de períodos, el quebrado ordinario que se halla por el método anterior no expresa el valor exacto de la fraccion decimal, y el error cometido es tanto más pequeño cuanto mayor es tambien el número de períodos que se consideran; de modo que ni la fraccion hallada anteriormente expresará el valor exacto de esta porcion decimal, ni la equivalente á un número limitado de períodos será igual á la fraccion decimal propuesta; pero si demostramos que la diferencia que hay entre ámbas fracciones ordinarias puede ser tan pequeña como queramos, siendo el número de períodos suficientemente grande, tendremos demostrado de otro modo que la fraccion ordinaria hallada anteriormente es la fraccion generatriz de la decimal propuesta.

Sea la misma fraccion decimal $n,abc\,abc\,abc\,abc\,abc\ldots$ y M el valor de la fraccion ordinaria equivalente á una parte que contiene m períodos, de modo que se tendrá

$$M = n,abc\,abc\ldots abc. \qquad [1]$$

Sea M′ la fraccion equivalente á la decimal que contiene un período más, es decir, $m+1$, de manera que se tiene

$$M' = n,abc\,abc\ldots abc\,abc.$$

Multiplicando esta igualdad por la unidad seguida de tantos ceros como cifras tiene el período, y restando de la que resulte la [1], se tendrá

$$1000M' - M = nabc - n; \qquad [2]$$

pero M′ siendo equivalente á la decimal que consta de $m+1$ períodos, se tiene

$$M' = n,abc\,abc\ldots abc + 0,000\,000\ldots 000\,abc,$$

ó lo que es lo mismo

$$M' = M + \frac{abc}{1000^{m+1}}:$$

de modo que sustituyendo este valor de M en la igualdad [2], se tendrá

$$1000M + \frac{abc}{1000^m} M = nabc - n;$$

quitando de ámbos miembros la fraccion $\frac{abc}{1000^m}$ y haciendo la reduccion, será

$$999M = nabc - n - \frac{abc}{1000^m};$$

de donde, partiendo por 999 ámbos miembros, se hallará

$$M = \frac{nabc - n}{999} - \frac{abc}{1000^m \times 999}.$$

Esto nos prueba que el valor M de una fraccion ordinaria equivalente á una parte que contiene m períodos de una decimal periódica pura, es igual á la fraccion constante $\frac{nabc - n}{999}$ ménos la fraccion $\frac{abc}{1000^m \times 999}$ que va aproximándose á cero á medida que el número m de períodos aumenta; de modo que cuando consideremos un número infinito de períodos, el quebrado $\frac{abc}{1000^m \times 999}$ será cero, y por consiguiente el valor exacto de la decimal, es la fraccion hallada $\frac{nabc - n}{999}$.

Si en la decimal $n,abc\ abc\ abc \ldots$ suponemos $n = 0$, la fraccion generatriz se reducirá á $x = \frac{abc}{999}$, es decir, á un quebrado que tiene por numerador el período y por denominador un número compuesto de tantos nueves como cifras tiene dicho período.

213. *Para convertir el valor exacto de una decimal periódica mixta en el de un quebrado ordinario, ó sea para hallar la fraccion* GENERATRIZ *que reducida á decimal nos da una fraccion periódica mixta, se forma un quebrado que tenga por numerador el entero*, que puede ser cero, *seguido de la parte no periódica y un período, ménos el entero y parte no periódica, y por denominador tantos nueves como cifras tiene el período seguidos de tantos ceros como cifras decimales tiene la parte no periódica.*

Es decir, que la fraccion ordinaria generatriz de la decimal $n,pqrsabc\ abc \ldots$ será, representándola por x,

$$x = \frac{npqrsabc - npqrs}{9990000}.$$

En efecto, siendo x el valor de la fraccion ordinaria equivalente á la decimal periódica mixta $n,pqrs\ abc\ abc\ abc \ldots$, se tendrá

$$x = n,pqrsabc\ abc\ abc \ldots$$

Multiplicando esta igualdad por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tiene la parte no periódica, tendremos

$$10000x = npqrs,abc\ abc\ abc \ldots;$$

pero segun hemos visto ya anteriormente, Núm. 212, se tiene

$$npqrs,abc\ abc\ abc\ ... = \frac{npqrsabc - npqrs}{999}:$$

de modo que sustituyendo este valor en la igualdad anterior, será

$$10000x = \frac{npqrsabc - npqrs}{999};$$

y dividiendo por 10000, tendremos finalmente

$$x = \frac{npqrsabc - npqrs}{9990000},$$

que es lo que se queria demostrar.

Observacion. Toda fraccion decimal periódica pura cuyo período es 9, es igual al entero de la decimal aumentado en una unidad.

Sea la fraccion $n,999...$, la cual se podrá poner bajo la forma

$$n,999\ ... = n + 0,999\ ... = n + \frac{9}{9} = n + 1.$$

Si la fraccion es periódica mixta se tendrá, llamando x al valor del quebrado equivalente,

$$x = n,pqr999\ ...;$$

multiplicando por la unidad seguida de tantos ceros como cifras tiene la parte no periódica, será

$$1000x = npqr,999\ ... = npqr + \frac{9}{9} = npqr + 1,$$

de donde $x = \frac{npqr + 1}{1000} = n,pqr +$ una unidad del último órden; luego toda fraccion decimal periódica mixta cuyo período es 9, es igual á una decimal exacta cuya parte decimal es la parte no periódica aumentada en una unidad del último órden.

214. *El denominador del quebrado equivalente á una decimal exacta, no tiene más factores primos que el 2 y 5, ó uno de estos solamente.*

En efecto, la fraccion equivalente á una decimal exacta, representándola despues de simplificada por $\frac{A}{B}$, es (209)

$$\frac{nabcd}{10000}=\frac{A}{B}.$$

La fraccion $\frac{nabcd}{10000}$, siendo igual al quebrado irreducible $\frac{A}{B}$, debe tener sus términos equimúltiplos de los de ésta (157); por consiguiente B no puede tener más factores de los que hay en la unidad seguida de ceros; y como en este último número sólo existen los factores 2 y 5, en B no pueden existir más factores primos que el 2 y 5 ó uno de estos solamente, que es lo que se queria demostrar.

215. *El denominador del quebrado ordinario equivalente á una decimal periódica pura, ó sea el denominador de la fraccion generatriz de una decimal periódica pura, es primo con* 10.

En efecto, representando dicha fraccion generatriz, despues de simplificada, por $\frac{A'}{B'}$, se tendrá (212)

$$\frac{nabc-n}{999}=\frac{A'}{B'}.$$

Siendo los términos de la primera fraccion equimúltiplos de los de la segunda, el denominador B′ no puede tener factores distintos de los que contiene el denominador de la primera; y como este número siempre está formado de nueves, no puede contener ninguno de los factores 2 y 5: luego si el denominador de la primera no contiene ninguno de los factores 2 y 5, ó es primo con 10, un divisor suyo B′ tambien lo será, segun queriamos demostrar.

216. *El denominador del quebrado equivalente á una decimal periódica mixta, ó sea el denominador de la fraccion generatriz de una decimal periódica mixta, contiene los factores primos 2 y 5, ó por lo ménos uno de ellos elevado á una potencia cuyo exponente es igual al número de cifras que tiene la parte no periódica, y ademas algun otro factor distinto.*

Sea $\frac{A''}{B''}$ la fraccion simplificada generatriz de una decimal periódica mixta; de modo que se tendrá (213)

$$\frac{npqrsabc - npqrs}{9990000} = \frac{A''}{B''}.$$

Ante todo debemos observar que el numerador de la primera fraccion nunca puede terminar en ceros; porque si terminase, las cifras c y s serian iguales y el período no principiaria, como se ha supuesto, en a, sino en s; luego dicho numerador no puede terminar en ceros. Si el numerador de la primera fraccion no puede terminar en ceros, no contendrá á la vez á los factores 2 y 5: todo lo más contendrá á uno de ellos.

El denominador de la misma fraccion se compone de un cierto número de nueves seguidos de tantos ceros como cifras no periódicas hay; luego en este denominador se hallarán los factores 2 y 5 elevados á una potencia cuyo exponente es igual al número de cifras que tiene la parte no periódica.

Esto supuesto, como uno de los factores 2 ó 5 es primo con el numerador, pudiendo serlo los dos, el denominador B″ de la fraccion simplificada contendrá á uno de los factores 2 ó 5 elevado á una potencia igual al número de cifras que tiene la parte no periódica; y contendrá ademas algun otro factor diferente del 2 y 5, porque sino, la fraccion decimal equivalente seria (214) exacta, lo que es contra la hipótesis.

217. *Toda fraccion irreducible cuyo denominador no contiene más factores primos que el 2 y 5, ó uno de ellos, convertida en decimal, da una fraccion decimal exacta.*

Este principio, que es el recíproco del (214), se ha demostrado ya (206).

218. *Toda fraccion ordinaria irreducible cuyo denominador es primo con 10 convertida en decimal, da una fraccion periódica pura.*

En efecto, la fraccion que se obtiene ha de ser exacta ó periódica (207, CONS.): exacta no puede ser, pues para que así sucediese era necesario que su denominador no tuviera más factores primos que 2 y 5 (206); luego tiene que ser periódica pura ó mixta. Mixta no puede ser tampoco, porque la fraccion generatriz de una decimal periódica mixta contiene necesariamente uno de los factores 2 ó 5 (215); luego la fraccion decimal que proviene del quebrado cuyo denominador es primo con 10 es periódica pura; que es lo que se queria demostrar.

219. *Toda fraccion irreducible cuyo denominador contiene uno de los factores 2 y 5, ó los dos, y ademas otro cualquiera diferente, reducida á decimal, da una fraccion periódica mixta cuya parte no periódica consta de tantas cifras como unidades tiene el mayor de los exponentes de 2 ó 5.*

En efecto, la fraccion decimal que se halle será periódica pura ó mixta (207): periódica pura no puede ser (215); luego tiene que ser periódica mixta. Ademas, el período debe principiar despues de tantas cifras como unidades tiene el mayor de los exponentes 2 ó 5; porque la fraccion generatriz de una decimal periódica mixta tiene por lo ménos uno de dichos factores elevado á una potencia igual al número de cifras de la parte no periódica (216), y por consiguiente si tuviera la parte no periódica un número de cifras mayor ó menor que el mayor de los exponentes 2 ó 5, dichos factores se hallarian en la generatriz, que es la fraccion propuesta, elevados á una potencia mayor ó menor que aquella que se habia supuesto; luego el período principiará despues de tantas cifras no periódicas como unidades tiene el mayor de los exponentes del 2 ó 5, segun se queria demostrar.

220. De todo lo dicho anteriormente resulta:

1.° Para que un quebrado irreducible, convertido en decimal, dé una fraccion decimal exacta, es necesario y suficiente que su denominador no tenga más factores primos que el 2 y 5.

2.° Para que un quebrado irreducible convertido en decimal dé una fraccion decimal periódica pura, es necesario y suficiente que su denominador sea primo con 10.

3.° Para que un quebrado irreducible convertido en decimal dé una fraccion decimal periódica mixta, es necesario y suficiente que su denominador, ademas de contener uno de los factores 2 ó 5, ó los dos, contenga otro factor primo distinto.

LECCION XXII.

Fracciones continuas. — Regla para convertir una fraccion ordinaria en fraccion contínua. — Formacion de los reducidos de una fraccion contínua.

Fracciones contínuas.

221. Se da el nombre de *fraccion contínua* á toda expresion de la forma

$$x = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \text{etc.},}}}$$

que se compone de un número entero a, el cual podrá ser cero, seguido de una fraccion que tiene por numerador la unidad y por denominador un número entero y positivo b, seguido de otra fraccion cuyo numerador es la unidad, y cuyo denominador es otro número entero y positivo c, seguido de otra fraccion de la misma forma que las anteriores, y así sucesivamente.

Los números a, b, c, d ... se llaman *cocientes incompletos* de la fraccion contínua; las cantidades $a, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d}$ ... se llaman *fracciones integrantes*.

Las expresiones

$$a, \quad a + \frac{1}{b}, \quad a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c}}, \quad a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d}}} \quad \ldots$$

reducidas á fracciones ordinarias, ó sean las expresiones

$$a, \quad \frac{ab+1}{b}, \quad \frac{(ab+1)c+a}{bc+1}, \quad \frac{[(ab+1)c+a]d+ab+1}{(bc+1)d+b} \quad \ldots,$$

se llaman *reducidas* ó *fracciones convergentes*.

222. El objeto de las fracciones contínuas es hallar por medio de fracciones ordinarias irreducibles y de términos sencillos, valores aproximados de cantidades conmensurables ó inconmensurables.

Regla para convertir una fraccion ordinaria en fraccion contínua.

223. *Para convertir una fraccion ordinaria en fraccion contínua, se ejecutan con sus dos términos las mismas operaciones que para hallar su máximo comun divisor, y los cocientes que resulten serán los cocientes incompletos de la fraccion contínua.*

En efecto, sea la fraccion ordinaria $\frac{A}{B}$ la que queremos reducir á fraccion contínua. Principiaremos por hallar la mayor parte entera que dicha fraccion contiene, para lo cual dividiremos A por B; y llamando a al cociente entero, y R al resto, tendremos

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} A & B & R & R' & R'' & R''' \\ \hline & a & b & c & d & e \\ R & R' & R'' & R''' & R^{IV} & \end{array}$$

que la fraccion dada se podrá poner bajo la forma siguiente:

$$\frac{A}{B}=a+\frac{R}{B}=a+\frac{1}{\frac{B}{R}}.$$

Hallemos la parte entera de la fraccion conocida $\frac{B}{R}$ efectuando la division de B por R, que es la segunda empleada en el *m . c . d .*; de modo, que llamando b al cociente entero y R′ al resto, hallaremos, como anteriormente,

$$\frac{B}{R}=b+\frac{R'}{R}=b+\frac{1}{\frac{R}{R'}}.$$

Haciendo lo mismo con la fraccion $\frac{R}{R'}$, tendremos

$$\frac{R}{R'}=c+\frac{R''}{R'}=c+\frac{1}{\frac{R'}{R''}}.$$

De la misma manera hallaremos

$$\frac{R'}{R''}=d+\frac{R'''}{R''}=d+\frac{1}{\frac{R''}{R'''}};\qquad \frac{R''}{R'''}=e+\frac{R^{IV}}{R'''}=\text{etc.}$$

Y continuado así esta serie de operaciones, llegaremos á una en que el resto de la division será cero, puesto que cada uno de ellos es menor que el anterior por lo ménos en una unidad.

Supongamos, para fijar las ideas, que este último resto sea R^{IV}, es decir, que $R^{IV}=0$; en este caso, el valor de la fraccion propuesta se podrá expresar, segun las igualdades establecidas anteriormente, por la fraccion contínua

$$\frac{A}{B}=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e}}}},$$

en la cual los cocientes incompletos a, b, c, d, e, son los cocientes que se obtienen en las divisiones que se practican para hallar el $m.c.d.$ de los números A y B, conforme hemos dicho en la regla.

Ejemplo 1.° Sea la fraccion $\frac{1384}{753}$ la que se quiere convertir en fraccion contínua.

Aplicando á los dos números 1384 y 753 el procedimiento del $m.c.d.$, hallaremos los cocientes incompletos de la fraccion contínua; así,

1384	753	631	122	21	17	4	1
631	1	1	5	5	1	4	4
	122	21	17	4	1	0	

La fraccion contínua equivalente á la fraccion propuesta, será segun la regla,

$$\frac{1384}{753}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4}}}}}}.$$

EJEMPLO 2.° Sea la fraccion propia $\frac{123}{478}$ la que tratamos de convertir en fraccion contínua.

Como la parte entera de esta fraccion es cero, la fraccion contínua equivalente no tendrá parte entera. Así, hallaremos

478	123	109	14	11	3	2	1
109	3	1	7	1	3	1	2
	14	11	3	2	1	0	

Luego será
$$\frac{123}{478} = \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}}}}}.$$

224. Si es una fraccion decimal la que se quisiera convertir en fraccion contínua, podrá suceder que esta decimal sea exacta, periódica pura, periódica mixta, ó inexacta de un número infinito de cifras. En los tres primeros casos se hallará la fraccion ordinaria equivalente á la fraccion decimal propuesta, y esta fraccion ordinaria se convertirá en fraccion contínua segun la regla anterior. En el cuarto caso, es decir, cuando la decimal no sea exacta, y por consiguiente sólo nos exprese el valor aproximado de una cantidad, podremos hallar tambien en fraccion contínua este valor aproximado, segun la siguiente regla:

225. *Para convertir una fraccion decimal inexacta en fraccion contínua, aumentaremos ó disminuiremos su última cifra en una unidad, segun que la decimal esté aproximada por defecto ó por exceso, obteniendo así dos límites que comprenden el verdadero valor de la cantidad propuesta; reduciremos simultáneamente á fracciones contínuas ámbos límites, y continuaremos la operacion hasta llegar á dos cocientes distintos, en cuyo caso la fraccion contínua que expresa el valor aproxima-*

do de la cantidad dada, será la que tenga por cocientes incompletos los cocientes que sean comunes á ámbas operaciones.

En efecto, supongamos que la cantidad X se halla comprendida entre otras dos A y B, y que desarrollando cada una de estas tres cantidades en fraccion contínua, hallamos los valores siguientes:

$$A = a + \frac{1}{\alpha}, \quad \alpha = b + \frac{1}{\alpha'}, \quad \alpha' = c + \frac{1}{\alpha''} \ldots$$

$$B = a + \frac{1}{\beta}, \quad \beta = b + \frac{1}{\beta'}, \quad \beta' = c + \frac{1}{\beta''} \ldots$$

$$X = a' + \frac{1}{x}, \quad x = b' + \frac{1}{x'}, \quad x' = c' + \frac{1}{x''} \ldots$$

Estando el valor de X comprendido entre los de A y B, y teniendo estas dos últimas cantidades una misma parte entera a, necesariamente la cantidad X tendrá la misma parte entera, y por lo tanto tendremos $a' = a$; las fracciones $\frac{1}{\alpha}$ y $\frac{1}{\beta}$ comprenderán á la fraccion $\frac{1}{x}$, luego el valor de x estará comprendido entre α y β. Del mismo modo deduciremos que $b' = b$, y que el valor de x' se halla comprendido entre los valores de α' y β', lo cual nos dará que $c' = c$, y que α'' y β'' comprenden á x'', y así de todos los demas; luego los cocientes incompletos que sean comunes á las dos primeras franciones contínuas, pertenecerán tambien á la tercera.

Ejemplo. Sea el número notable por el uso frecuente que de él se hace en análisis, $e = 2{,}71828\ldots$ el que se quiere convertir en fraccion contínua.

Estando aproximado el número e por defecto en ménos de una unidad del quinto órden, aumentaremos á su última cifra una unidad, y obtendremos por límite superior del número e, la decimal 2,71829, cuyos dos límites se podrán poner bajo la forma $\frac{271828}{100000}$ y $\frac{271829}{100000}$.

Aplicando ahora á estas fracciones la regla para convertirlas en fracciones contínuas, hallaremos, segun el cuadro siguiente de operaciones, los cocientes incompletos comunes á las dos fracciones 2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1.

271828	100000	71828	28172	15484	12688	2796	1504	1292	212
	2	1	2	1	1	4	1	1	6
71828	28172	15484	12688	2796	1504	1292	212	20	

271829	100000	71829	28171	15487	12684	2803	1472	1331	141
	2	1	2	1	1	4	1	1	9
71829	28171	15487	12684	2803	1472	1331	141	62	

Luego el número vendrá expresado aproximadamente por la fraccion contínua

$$e = 2{,}71828\ldots = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \text{etc.}}}}}}}}$$

Formacion de las reducidas de una fraccion contínua.

226. Ya hemos dicho al principio de esta teoría que se llaman reducidas de una fraccion contínua general, cada una de las expresiones a, $a + \frac{1}{b}$, $a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c}}$, etc., reducida á fraccion ordinaria; de donde se deduce que la primera reducida es $\frac{a}{1}$, la segunda $\frac{ab+1}{b}$, la tercera $\dfrac{a\left(b + \frac{1}{c}\right) + 1}{b + \frac{1}{c}} =$ $\dfrac{abc + a + c}{bc + 1} = \dfrac{(ab+1)\,c + a}{bc + 1}$; en general una reducida cualquiera se obtiene agregando al último cociente incompleto de la reducida anterior la fraccion integrante que sigue; así la cuarta reducida la hallariamos poniendo en la tercera en vez del

último cociente incompleto c, la suma de éste con la fraccion integrante que sigue; es decir, $c+\frac{1}{d}$.

227. *Para formar una reducida cualquiera, se multiplican los dos términos de la reducida anterior por el cociente incompleto correspondiente á la reducida que se quiere formar, y á estos productos se les agrega respectivamente los términos de la reducida que está dos lugares ántes.*

En efecto, la primera y segunda reducida de la fraccion contínua general, son, como hemos visto, $\frac{a}{1}$ y $\frac{ab+1}{b}$, las cuales se obtienen inmediatamente considerando el primer cociente incompleto dividido por la unidad, y reduciendo el número mixto $a+\frac{1}{b}$ á fraccionario.

La tercera vemos que, despues de poner en vez del último cociente b el número mixto $b+\frac{1}{c}$, y hechas todas las operaciones, se reduce á la fraccion $\frac{(ab+1)c+a}{bc+1}$, la cual se forma segun la regla enunciada.

La cuarta reducida la obtendremos poniendo en la tercera, en vez del último cociente incompleto c, el número mixto $c+\frac{1}{d}$; así, se tendrá

$$\frac{(ab+1)\left(c+\frac{1}{d}\right)+a}{b\left(c+\frac{1}{d}\right)+1}.$$

Multiplicando los dos términos de este quebrado por d, y haciendo las reducciones, resulta

$$\frac{(ab+1)(cd+1)+ad}{b(cd+1)+d}=\frac{[(ab+1)c+a]d+ab+1}{(bc+1)d+b}.$$

Donde vemos que esta cuarta reducida se forma tambien segun la regla.

Esto supuesto, si nosotros demostramos que si una reducida cualquiera se forma segun la ley enunciada, la reducida siguiente se forma tambien segun la misma, tendremos justificada la regla; pues verificándose para la cuarta reducida, como acabamos de ver, se verificará tambien para la quinta, y así sucesivamente.

Para esto supongamos tres reducidas consecutivas $\frac{P}{P'}$, $\frac{Q}{Q'}$ y $\frac{R}{R'}$, cuyos cocientes incompletos correspondientes sean p, q y r; es decir, las mismas letras por que vienen expresadas las fracciones, pero minúsculas. Admitamos ademas que la tercer reducida se forma segun la regla, de modo que se tenga $R = Qr + P$ y $R' = Q'r + P'$, y por tanto

$$\frac{R}{R'} = \frac{Qr + P}{Q'r + P'}.$$

Para formar la reducida siguiente, tenemos que poner en ésta en vez de r el número mixto $r + \frac{1}{s}$; de modo que se tendrá

$$\frac{S'}{S} = \frac{Q\left(r + \frac{1}{s}\right) + P}{Q'\left(r + \frac{1}{s}\right) + P'}.$$

Multiplicando los dos términos de esta fraccion por s, y haciendo todas las reducciones, se hallará

$$\frac{S}{S'} = \frac{Qrs + Q + Ps}{Q'rs + Q' + P's} = \frac{(Qr + P)s + Q}{(Q'r + P')s + Q'};$$

y poniendo en vez de $Qr + P$ y $Q'r + P'$, sus iguales R y R', se tendrá finalmente

$$\frac{S'}{S} = \frac{Rs + Q}{R's + Q'};$$

luego esta última reducida se forma segun la regla, que es lo que se queria demostrar.

Ejemplo I. Hallar las reducidas de las fracciones contínuas

$$A = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4}}}}}}.$$

$$B = \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}}}}}.$$

Las de A serán $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{1}$, $\frac{2 \cdot 5 + 1}{1 \cdot 5 + 1} = \frac{11}{6}$, $\frac{15 \cdot 5 + 2}{6 \cdot 5 + 1} = \frac{57}{31}$, $\frac{57 \cdot 1 + 11}{31 \cdot 1 + 6} = \frac{68}{37}$, $\frac{68 \cdot 4 + 57}{37 \cdot 4 + 31} = \frac{329}{179}$, $\frac{329 \cdot 4 + 68}{179 \cdot 4 + 37} = \frac{1384}{756}$.

Del mismo modo hallaremos que las reducidas de B son $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{8}{31}$, $\frac{9}{35}$, $\frac{35}{136}$, $\frac{44}{171}$, $\frac{123}{478}$.

Ejemplo II. Sean las fracciones contínuas ilimitadas cuyas reducidas queremos hallar,

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \text{etc.}}}}}}}} \qquad \pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \text{etc.}}}}}$$

Las de e serán $\frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{8}{3}, \frac{11}{4}, \frac{19}{7}, \frac{87}{32}, \frac{106}{39}, \frac{139}{71} \dots$

Las de π son $\frac{3}{1}, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{103993}{33102} \dots$

Las segundas, que nos dan valores aproximados de π, expresan la relacion aproximada del diámetro á la circunferencia.

LECCION XXIII.

Propiedades más importantes de las reducidas. — Modo de hallar una reducida cuyo valor se diferencia de la fraccion continua total en ménos de $\frac{1}{\delta}$.

Propiedades más importantes de las reducidas.

228. *El numerador de la diferencia de dos reducidas consecutivas es $+1$ ó -1, segun que aquella de la cual se resta sea de lugar par ó impar, considerando á cero como primera reducida si la fraccion continua no tiene parte entera.*

Sean $\frac{P}{P'}$, $\frac{Q}{Q'}$ y $\frac{R}{R'}$ tres reducidas consecutivas cualesquiera, de las cuales la tercera será (227) $\frac{R}{R'} = \frac{Qr + P}{Q'r + P'}$.

Restando de cada reducida la que le precede, hallaremos

$$\frac{Q}{Q'} - \frac{P}{P'} = \frac{QP' - PQ'}{P'Q'}, \quad \frac{R}{R'} - \frac{Q}{Q'} = \frac{Qr + P}{Q'r + P'} - \frac{Q}{Q'} =$$

$$\frac{QQ'r + PQ' - QQ'r - QP'}{Q'(Q'r + P')} = \frac{-(QP' - PQ')}{Q'(Q'r + P')};$$

donde vemos que los numeradores de estas dos diferencias son iguales y de signo contrario; pero restando de la segunda reducida la primera, hallaremos $\frac{ab+1}{b} - \frac{a}{1} = \frac{ab + 1 - ab}{b} =$ $\frac{+1}{b}$; luego el numerador de la diferencia siguiente, es decir, el de la que resulta de restar de la tercera la segunda será -1; el de la siguiente $+1$, y así sucesivamente. Con lo cual queda justificado el teorema, y por consiguiente demostrada la igualdad

$$QP' - PQ' = \pm 1,$$

en la cual P y P' son los dos términos de una reducida cualquiera, y Q y Q' los de la reducida siguiente; debiéndose tomar el signo $+$ si $\frac{Q}{Q'}$ es de lugar par, y el signo $-$ si fuese de lugar impar.

229. *Las reducidas son fracciones irreducibles.*

En efecto, si los dos términos Q y Q' de una reducida cualquiera tuvieran un factor comun α distinto de la unidad, el primer miembro de la igualdad

$$QP' - PQ' = \pm 1$$

seria divisible por este factor; siendo el primer miembro divisible por α, el segundo miembro ± 1 tambien seria divisible, lo cual es absurdo; luego los dos términos de la reducida $\frac{Q}{Q'}$ son primos entre sí, y por tanto dicha reducida es irreducible.

CONSECUENCIAS. 1.ª *Si una fraccion ordinaria reducible se convierte en fraccion contínua, y despues se forman las reducidas, la última será el valor de la fraccion propuesta totalmente simplificada.*

2.ª *La diferencia de dos reducidas consecutivas cualesquiera es ± 1, segun que la reducida minuendo sea de lugar par ó impar, dividido por el producto de los denominadores de las mismas.*

230. *Las reducidas de lugar impar son menores que la fraccion contínua total, y las de lugar par mayores. Y cuando es limitada la fraccion contínua, la última reducida es igual á dicha fraccion.*

Sean $\frac{P}{P'}$, $\frac{Q}{Q'}$ y $\frac{R}{R'}$ tres reducidas de la fraccion contínua general cuyos cocientes incompletos son $a, b, c \ldots, p, q, r, s, t \ldots$;

segun la formacion de las reducidas, se tiene (227) $\frac{R}{R'} = \frac{Qr+P}{Q'r+P'}$. Si ahora representamos por y todo el resto de la fraccion contínua á partir del cociente incompleto r, es decir, si hacemos

$$y = r + \cfrac{1}{s + \cfrac{1}{t + \text{etc.}}} \qquad [1],$$

y sustituimos r por y en la reducida anterior, hallaremos la fraccion $\frac{Qy+P}{Q'y+P'}$, que nos expresará el valor de la fraccion contínua total, la cual podremos representar por x; de modo que se tendrá

$$x = \frac{Qy+P}{Q'y+P'}.$$

Si ahora restamos de x cada una de las reducidas consecutivas $\frac{P}{P'}$ y $\frac{Q}{Q'}$, hallaremos las dos diferencias

$$\left.\begin{aligned} x-\frac{P}{P'} &= \frac{Qy+P}{Q'y+P'}-\frac{P}{P'} = \frac{(QP'-PQ')y}{P'(Q'y+P')} = \frac{\pm y}{P'(Q'y+P')} \\ x-\frac{Q}{Q'} &= \frac{Qy+P}{Q'y+P'}-\frac{Q}{Q'} = \frac{-(QP'-PQ')}{Q'(Q'y+P')} = \frac{\mp 1}{Q'(Q'y+P')} \end{aligned}\right\} [2],$$

donde vemos que si la reducida $\frac{P}{P'}$ es, para fijar las ideas, de lugar impar, en cuyo caso $\frac{Q}{Q'}$ es de lugar par, la diferencia $QP' - PQ'$ es positiva, y entónces hay que tomar los signos superiores; lo cual nos prueba que la diferencia $x - \frac{P}{P'}$ es positiva, y $x - \frac{Q}{Q'}$ negativa, y por tanto la reducida de lugar impar $\frac{P}{P'}$ es menor que la fraccion contínua x, y $\frac{Q}{Q'}$, que es de lugar par, es mayor, segun se queria demostrar.

Consecuencia. *El valor de la fraccion contínua total, está comprendido entre dos reducidas consecutivas.*

231. *Una reducida cualquiera se aproxima más á la fraccion contínua total que la reducida anterior.*

En efecto, de las igualdades [2] se deduce que la diferencia entre el valor de la fraccion contínua x y la reducida $\frac{Q}{Q'}$, es menor que la diferencia entre la misma fraccion y la reducida anterior $\frac{P}{P'}$; porque prescindiendo del signo, el valor absoluto de la diferencia $x - \frac{Q}{Q'} = \frac{1}{Q'(Q'y + P')}$, es menor que el de la diferencia $x - \frac{P}{P'} = \frac{y}{P'(Q'y + P')}$, por ser y, numerador de la primera diferencia, mayor que 1, segun indica la igualdad [1], y el denominador de la misma $P'(Q'y + P')$, menor que el denominador de la segunda diferencia $Q'(Q'y + P')$, pues teniendo ámbos denominadores el factor comun $Q'y + P'$, el otro factor P' es menor que Q', segun se deduce de su formacion (227); luego por esta doble razon la diferencia segunda es menor que la primera, y la reducida $\frac{Q}{Q'}$ se aproxima más á la fraccion contínua que la reducida anterior $\frac{P}{P'}$, segun queriamos demostrar.

Consecuencia. Siendo la fraccion contínua mayor que las reducidas de lugar impar, y menor que las de lugar par, y aproximándose cada reducida á la fraccion contínua más que la anterior, se sigue que las reducidas de lugar impar van aumentando, y las de lugar par disminuyendo; ámbas clases van por lo tanto convergiendo hácia el valor de la fraccion contínua total, por cuya razon se les llama tambien á las reducidas fracciones *convergentes*.

Modo de hallar una reducida cuyo valor se diferencie de la fraccion contínua total en ménos de $\frac{1}{\delta}$.

232. *El error que se comete tomando una reducida cualquiera por el valor de la fraccion contínua total, es menor que la unidad dividida por el denominador de dicha reducida multi-*

plicado por la suma de este denominador y el de la reducida precedente; ó menor que la unidad dividida por el cuadrado del denominador de la reducida que se considera; ó por último, *menor que la unidad dividida por dicho denominador multiplicado por el de la reducida anterior.*

En efecto, el valor absoluto de la diferencia entre una reducida y la fraccion contínua total x es, prescindiendo del signo,

$$x-\frac{Q}{Q'}=\frac{1}{Q'(Q'y+P')} \qquad [3];$$

pero siendo y mayor que la unidad, segun se deduce de la igualdad [1], si la suprimimos en el denominador, es claro que dicho denominador habrá disminuido, y por tanto el quebrado $\frac{1}{Q'(Q'+P')}$ será mayor que $x-\frac{Q}{Q'}$; luego la diferencia que hay entre $\frac{Q}{Q'}$ y x es menor que $\frac{1}{Q'(Q'+P')}$, es decir, menor que la unidad dividida por el denominador Q' de la fraccion dada multiplicado por la suma $Q'+P'$ de dicho denominador y el de la precedente.

Si en la igualdad [3], ademas de suprimir y, suprimimos la cantidad P', la fraccion que resulta $\frac{1}{Q'Q'}=\frac{1}{Q'^2}$ será mayor que $\frac{1}{Q'(Q'+P')}$, y con más razon que la diferencia $x-\frac{Q}{Q'}$; luego la unidad dividida por el cuadrado del denominador de la reducida que se considera es mayor que la diferencia entre dicha reducida y la fraccion contínua total, y por consiguiente, es un límite del error que se comete tomando la una por la otra.

Por último, suprimiendo el sumando $Q'y$ del segundo factor que hay en el segundo miembro de la igualdad [3], hallaremos la fraccion $\frac{1}{P'Q'}$, que será mayor que todos los anteriores $\frac{1}{Q'^2}$, $\frac{1}{Q'(Q'+P')}$ y $\frac{1}{Q'(Q'y+P')}$; y por tanto expresa tambien un límite del error que se comete al tomar la reducida $\frac{Q}{Q'}$ por el valor de la fraccion contínua total.

El órden de aproximacion de estos límites, es aquel en que los hemos enunciado; y de todos ellos el que generalmente se usa en las aplicaciones, es el segundo.

233. Del principio anterior se deduce, *que para hallar el valor de una fraccion contínua en ménos de una cantidad $\frac{1}{\delta}$, bastará llegar hasta una reducida cuyo denominador sea igual ó mayor que la raiz cuadrada de* δ.

Si la fraccion contínua es limitada, no sólo obtendremos reducidas que se diferencien de ella en ménos de una cantidad dada, sino que podremos llegar á la última, la cual expresa el valor exacto de dicha fraccion. Respecto á las fracciones contínuas ilimitadas, observaremos que siempre podremos llegar á obtener una reducida cuyo denominador sea igual ó mayor que una cantidad dada δ por muy grande que sea; pues segun la formacion de las reducidas van creciendo sus términos indefinidamente, á medida que crece el número de cocientes incompletos que se consideran. Por lo tanto siempre podremos llegar á una reducida $\frac{Q}{Q'}$ cuyo denominador Q' sea igual ó mayor que la raiz cuadrada de δ, en cuyo caso tendremos

$$Q' \overline{\overline{>}} \sqrt{\delta}, \quad \text{de donde} \quad Q'^2 \overline{\overline{>}} \delta,$$

y dividiendo la unidad por cada una de estas cantidades, se halla

$$\frac{1}{Q'^2} \overline{\overline{<}} \frac{1}{\delta}; \text{ pero } \frac{1}{Q'^2} > x - \frac{Q}{Q'},$$

luego
$$x - \frac{Q}{Q'} < \frac{1}{\delta}.$$

Donde vemos que la reducida $\frac{Q}{Q'}$ se diferencia de la fraccion contínua total x en una cantidad menor que la fraccion dada $\frac{1}{\delta}$, segun queriamos demostrar.

CUARTA PARTE.

NÚMEROS COMPLEJOS, Y SISTEMA MÉTRICO.

Números complejos.

LECCION XXIV.

Sistema antiguo de pesas y medidas más principales de España. — Reduccion de unidades de una especie cualquiera á otras de especie superior ó inferior.

Sistema antiguo de pesas y medidas más principales de España.

234. Ya hemos dado medios generales (145) para apreciar el valor de una cantidad cualquiera por medio de números enteros y quebrados, eligiendo una cierta unidad si la cantidad que se mide ó aprecia es *contínua*, ó tomando por unidad un objeto de los que componen una cantidad cuando es *discontínua* ó colectiva.

Cuando sólo se trata de establecer relaciones *matemáticas* entre cantidades, y se establecen entre los números que expresan sus valores numéricos, entónces la eleccion de las unidades es completamente arbitraria, y esta arbitrariedad permite que estas relaciones, ó los cálculos hechos con dichos valores, sean más ó ménos sencillos; pero si las relaciones de que hablamos son *comerciales*, y por lo tanto han de ser sabidas por todos los hombres, en ese caso es necesario convenir en las unidades que han de servir para apreciar las cantidades, y una vez elegidas y establecidas legalmente, se les considera como *patrones* de los que se deducen todas las demas.

Desde luégo se comprende que si todas las cantidades se midiesen con las unidades elegidas como patrones, los números que nos expresaran sus valores podrian ser ó muy grandes ó muy pequeños, cuyos dos extremos entorpecerian los cálculos á que dichas cantidades se sometiesen, ó no darian una idea bastante clara de la cantidad que representan; por lo cual, segun que la cantidad que se vaya á medir sea muy grande ó muy pequeña con relacion á la que se ha tomado por *unidad patron*, así se elige para apreciarla otra unidad que sea un cierto múltiplo ó divisor de la primera. De este modo se forma un conjunto de unidades para medir ó apreciar convenientemente las cantidades, que es á lo que se da el nombre de *sistema de pesas y medidas;* y si este sistema está adoptado por el gobierno de una nacion para que sus habitantes se rijan por él, entónces dicho sistema toma el nombre de *legal*.

235. Siete son las clases de unidades que se consideran para medir las cantidades, que son: unidades de *longitud*, de *superficie*, de *volúmen*, de *capacidad*, de *peso*, de *tiempo*, y de *numerario*.

236. UNIDADES DE LONGITUD. Son aquellas que sirven para medir las distancias que hay de un punto á otro, y como éstas se aprecian por la línea recta que los une (*), de aquí que se les dé tambien el nombre de *unidades lineales*.

La unidad principal ó patron de estas medidas es la VARA, que es una longitud convencional que se halla en el archivo de Búrgos. La vara se divide en 3 piés; el *pié* en 12 pulgadas; la *pulgada* en 12 líneas, y la *línea* en 12 puntos.

Los múltiplos de la vara, ó sean las unidades que sirven para medir grandes distancias, son: la *braza*, que tiene 2 varas; el *estadal*, que tiene 2 brazas, y la *legua* 20000 piés, ó sean 6666 $^2/_3$ vara.

La legua se divide en medias leguas y cuartos de legua. La vara se divide tambien en cuatro palmos; el *palmo* en 12 dedos, y el *dedo* en 9 líneas.

En marina se usan las leguas llamadas de 20 al grado, que tienen 6646 varas; la *milla*, que tiene 1108 brazas; el *cable*, que tiene 120 brazas, y el *codo* de ribera 2 piés y 9 líneas.

(*) Para comprender bien lo relativo á las unidades lineales de superficie y volúmen, véanse las ligeras nociones de geometría al final del apéndice.

Unidades de superficie. Son las que sirven para medir la extension en sus dos sentidos longitud y latitud, que es lo que constituye la superficie. Estas unidades son los diferentes *cuadrados* que tienen por lado cada una de las unidades lineales, por cuya razon se les llama tambien unidades *cuadradas*.

Las que generalmente se usan son la *legua cuadrada*, que sirve para medir grandes extensiones. Las llamadas *agrarias* por usarse en la medicion de los campos, que son la *fanega superficial* ó marco real, que tiene 576 estadales cuadrados, y que se divide en 12 celemines superficiales; el *celemin superficial* tiene 48 estadales cuadrados; la *aranzada*, que tiene 400 estadales cuadrados; el *estadal cuadrado* tiene 4 *brazas cuadradas* ó 16 *varas cuadradas*. Para medir cortas extensiones se usa la *vara cuadrada*, que tiene 9 piés cuadrados; el *pié cuadrado*, que tiene 144 pulgadas cuadradas; la *pulgada cuadrada* 144 líneas cuadradas, y la *línea cuadrada*, que tiene 144 puntos cuadrados.

Unidades de volúmen. Son las que sirven para medir la extension en sus tres dimensiones *longitud*, *latitud* y *profundidad*, que es lo que constituye el volúmen de un cuerpo. Estas unidades son los diferentes *cubos* que tienen por lados las diferentes unidades lineales, por lo que se les llama tambien unidades *cúbicas*. Las más principales son la *tonelada de arqueo*, que sirve para medir el buque de una embarcacion, y tiene 8 codos cúbicos de ribera, la *vara cúbica*, que tiene 27 piés cúbicos; el *pié cúbico*, que tiene 1728 pulgadas cúbicas.

Medidas de capacidad. Las medidas de capacidad se dividen en dos clases, segun sean para medir áridos ó líquidos. Las que sirven para áridos son: el *cahiz*, que tiene 12 fanegas; la *fanega* 12 celemines; el *celemin* 4 cuartillos. El patron de esta medida es la *media fanega*, que se conserva en la ciudad de Avila.

Las que sirven para medir líquidos son: el *moyo*, que tiene 16 cántaras; la *cántara* ó *arroba*, que tiene 4 cuartillas; la *cuartilla* 2 azumbres; la *azumbre* 4 cuartillos; el *cuartillo* 4 copas.

El patron de estas medidas es la *cántara*, y se halla en la ciudad de Toledo.

El aceite se mide por unidades de capacidad que se arreglan al peso: así, la *cántara* ó arroba de aceite se divide en 25 libras, y la libra en 4 panillas.

Unidades de peso. Son las que sirven para apreciar el de los cuerpos; las más principales son: la *tonelada de peso*, que tiene 20 quintales; el *quintal* 4 arrobas; la *arroba* 25 libras; la *libra* 16 onzas; la *onza* 16 adarmes; el *adarme* 3 tomines, y el *tomin* 12 granos.

La libra se divide tambien en 2 *marcos* ó medias libras, y en 4 cuarterones.

El patron de estas medidas es el *marco*, conservado en el archivo del Consejo de Castilla.

En medicina la libra tiene 12 onzas, la *onza* se divide en 8 dracmas, la *dracma* en 3 escrúpulos, y el *escrúpulo en 24* granos.

Para pesar el oro y la plata se usa el *marco*, que tiene 8 onzas, la *onza* 8 ochavas, la *ochava* 6 tomines, y el *tomin* 12 granos.

Las piedras preciosas se aprecian por quilates; el *quilate* se divide en *medios, cuartos, octavos, diez y seis avos, treinta y dos avos*, y *sesenta y cuatro avos*.

Unidades de tiempo. Son las que sirven para apreciar el que trascurre de un acontecimiento á otro. Las principales son el *siglo*, que tiene 100 años; el *lustro* tiene 5 años; el *año* 12 meses; el *mes* comun 30 dias; el *dia* 24 horas; la *hora* 60 minutos; el *minuto* 60 segundos, y el *segundo* 60 terceros.

Unidades de numerario. Son las que pertenecen al dinero, las cuales están representadas por monedas de oro, plata y cobre. La unidad principal es el *real*, que se divide en 34 *maravedís:* tambien se usa como unidad monetaria el *duro*, que tiene 20 reales ó 680 maravedís.

Reduccion de unidades de una especie cualquiera á otras de especie superior ó inferior.

237. *Para reducir un número de unidades de una especie cualquiera á otra de especie inferior ó superior, se multiplica ó parte dicho número por el que expresa las veces que una unidad de la especie dada contiene ó está contenida en aquella á que se quiere reducir.*

En efecto, este problema no es más que una de las aplicaciones de multiplicar ó partir (40 y 41). Lo que podria suceder es que no se conociese el número de veces que una unidad contiene ó está contenida en otra; pero sabiendo las veces que una unidad cualquiera contiene á la inmediata inferior, se puede saber las veces que contiene á una de especie dada; para lo que no habrá más que reducir la unidad propuesta á la especie inferior, el número que resulte reducirlo á la especie siguiente, y continuar así hasta llegar á la especie que se nos da; el último número que hallemos nos expresará las unidades que de esta especie contiene la primera.

Si tratásemos de averiguar las veces que una unidad está contenida en otra, no habria más que ver segun el caso anterior, cuántas veces contiene esta segunda á la primera, y este será el número que se pide.

Así se verá que la *libra* contiene 16 veces á la onza, $16 \times 16 = 256$ al adarme, $256 \times 3 = 768$ al tomin, y $768 \times 12 = 9216$ al grano: y que está contenida 25 veces en la arroba, y 100 veces en el quintal.

En las unidades de superficie y volúmen generalmente no se da la relacion que hay entre una unidad y la inmediata inferior ó superior; es necesario determinarla segun las dos reglas siguientes:

238. *El número de veces que contiene una unidad cuadrada á otra de especie inferior, es igual á la segunda potencia ó cuadrado del número de veces que la unidad lineal correspondiente á la primera contiene á la unidad lineal que corresponde á la segunda* (*).

Supongamos un cuadrado que tenga por lado una cierta unidad lineal, la cual equivale á m unidades lineales de una especie inferior.

Si dividimos dos lados opuestos del cuadrado propuesto en m partes, y unimos los puntos correspondientes, obtendremos m fajas que cada una tendrá de ancho una de las m unidades lineales; si ahora dividimos los otros dos lados opuestos en otras m partes y unimos los puntos correspondientes, resultará dividida cada una de las m fajas en m cuadrados que tendrán por lado

(*) Véase la figura 10 que sirve para hallar los piés cuadrados que tiene una vara.

una de las unidades lineales inferiores; por consiguiente, si hay comprendidas en el cuadrado grande m fajas y cada una contiene m cuadrados pequeños, el número de éstos que habrá contenidos en aquel estará expresado por $m \times m = m^2$: luego la unidad primera cuadrada, ó sea el cuadrado que tiene por lado la unidad primera, se compone de m^2 unidades cuadradas que tienen por lado la unidad lineal inferior; luego si una unidad lineal contiene m veces á otra unidad lineal de especie inferior, la *unidad* primera *cuadrada* contendrá á la segunda *unidad cuadrada* el cuadrado del número m; que es lo que se queria demostrar.

Así, el *marco real* ó *fanega superficial*, que es un cuadrado que tiene por lado 24 estadales, se compondrá de 24^2 igual á $24 \times 24 = 576$ estadales cuadrados. El estadal cuadrado será igual á 16 varas cuadradas, puesto que el estadal lineal tiene 4 varas lineales y $4^2 = 4 \times 4 = 16$.

Conociendo el valor de una unidad cuadrada cualquiera en unidades cuadradas de un órden inferior, se podrá conocer el valor de un número cualquiera n, multiplicando por n el número de veces que la mayor contiene á la inferior. Así, 7 varas cuadradas equivaldrá á $7 \times 9 = 63$ piés cuadrados; porque teniendo una vara lineal 3 piés, una vara cuadrada tendrá, segun lo dicho anteriormente, 9; y si una tiene 9 piés cuadrados, 7 tendrán $7 \times 9 = 63$. Sin embargo, es necesario no confundir un cierto número de unidades cuadradas, con el cuadrado que tiene por lado las mismas unidades lineales; así, 4 varas cuadradas no es lo mismo que un estadal cuadrado, ó sea el cuadrado que tiene por lado 4 varas, puesto que dicho cuadrado se compone de $4^2 = 4 \times 4 = 16$ varas cuadradas, que es el cuádruplo del número de varas cuadradas que se nos dió.

239. *El número de veces que contiene una unidad cúbica á otra de especie inferior, es igual á la tercera potencia ó cubo del número de veces que la unidad lineal correspondiente á la primera contiene á la unidad lineal que corresponde á la segunda* (*).

(*) Véase la figura 11, que sirve para hallar los piés cúbicos que tiene una vara cúbica.

Supongamos un cubo que tenga por lado una unidad lineal equivalente á m unidades lineales de especie inferior. Si dividimos la altura en m partes iguales y por los puntos de division cortamos por planos al cubo dado, quedará éste dividido en m porciones que tendrán de grueso una unidad lineal de la especie inferior: si ahora dividimos el largo de cada una de estas porciones en m partes y por los puntos de division la cortamos por planos, hallaremos un nuevo número de trozos igual á $m \times m = m^2$, que tendrán de grueso y ancho una unidad lineal de la especie inferior y de largo una de las unidades dadas; y por último, dividiendo el largo de cada uno de estos trozos en m partes y cortándoles por los puntos de division, cada uno quedará dividido en m cubos que tendrán por lado una unidad lineal de las de especie inferior, y como el número de trozos es m^2, el número de cubos será $m^2 \times m = m^3$: luego una *unidad cúbica* cualquiera contiene á otra de un órden inferior un número de veces igual á la tercera potencia ó cubo del número de veces que la unidad lineal correspondiente á la primera contiene á la lineal que corresponde á la segunda; que es lo que se queria demostrar.

Así, una *vara cúbica* tiene 27 piés cúbicos, un *pié cúbico* tiene 1728 pulgadas cúbicas, etc.

Ejemplos. 1.° Reducir 12 *arrobas* á *onzas*.

Como la arroba contiene á la libra 25 veces y á la onza $25 \times 16 = 400$, el número 12 *arrobas* contendrá $400 \times 12 = 4800$ *onzas;* luego 12 *arrobas* $= 4800$ *onzas*.

2.° Reducir 24 *líneas* á *piés*.

Como el pié contiene á la pulgada 12 veces y á la línea $12 \times 12 = 144$, el número 24 *líneas* reducido á pié será

$$\frac{24}{144} = \frac{12}{72} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \text{ piés.}$$

3.° Reducir 124 *estadales cuadrados* á *piés cuadrados*.

Como el estadal cuadrado tiene 16 varas cuadradas y 16 multiplicado por $9 = 144$ piés cuadrados, el número 124 estadales cuadrados tendrá $124 \times 144 = 17856$ *piés cuadrados*.

4.° Reducir 18 *piés cúbicos* á *pulgadas cúbicas*.

Como un pié cúbico tiene 1728 pulgadas cúbicas, el número 18 piés cúbicos tendrá $1728 \times 18 = 31104$ *pulgadas cúbicas.*

5.° Reducir 5184 pulgadas cuadradas á varas cuadradas.

Como la vara cuadrada tiene 9 piés cuadrados y $9 \times 144 = 1296$ pulgadas cuadradas, el número 5184 pulgadas cuadradas equivaldrá á $\frac{5184}{1296} = 4$ *varas cuadradas.*

LECCION XXV.

Reduccion de quebrados á números complejos de especie inferior ó valuacion de quebrados. — Reduccion de un número de unidades de especie inferior á número complejo. — Reduccion de números complejos á incomplejos. — Adicion de los números complejos. — Sustraccion de los números complejos.

Reduccion de quebrados á números complejos de especie inferior ó valuacion de quebrados.

240. Al apreciar una cantidad con una de las unidades superiores de las que constituyen un sistema de pesas y medidas, puede suceder que dicha unidad no esté contenida exactamente en la cantidad que se quiere medir, en cuyo caso el resto que se obtiene se aprecia con unidades inferiores á la primera; dando orígen de este modo, *á un conjunto de números concretos de una misma naturaleza, pero referidos á distintas unidades, que es lo que se llama* NÚMERO COMPLEJO.

241. *Para valuar quebrados ó reducirles á complejos, se divide el numerador por el denominador, y el cociente que se obtiene es el número de unidades de la especie á que se refiere el quebrado; despues se multiplica el resto por las veces que una unidad de las dadas contiene á la inmediata inferior, el producto se divide por el divisor, y el cociente expresará las unidades de especie inmediata inferior, y así se continúa hasta llegar á un cociente exacto, ó á la ínfima de las especies.*

Sea, por ejemplo, reducir á complejo el quebrado $\frac{9}{7}$ *vara.*

Pudiendo considerar á este quebrado de vara como el cociente de dividir 9 varas entre siete, efectuando en lo que sea posible la division, hallaremos por cociente 1 vara, y 2 de resto, que reducidas á piés darán 6; luego el quebrado $\frac{2}{7}$ de vara que se obtendria en la primera division se reduce á $\frac{6}{7}$ de pié, y como este quebrado no llega á valer un pié, reduciéndole á quebrado de pulgada, se tendrá el nuevo quebrado $\frac{72}{7}$ de pulgada, que es igual á 10 pulgadas y $\frac{2}{7}$ de otra, y hallando el valor de este último quebrado tenemos el resultado.

La operacion se dispone del modo siguiente:

$$\begin{array}{rl|l}
 & 9 \textit{ var.} & 7 \\ \cline{3-3}
 & 2 & 1 \text{ var.}, 0 \text{ piés}, 10 \text{ pul.}, 3\,{}^{3}/_{7} \text{ lin.} \\
\times & 3 & \\ \hline
 & 6 \textit{ piés.} & \\
\times & 12 & \\ \hline
 & 72 \textit{ pul.} & \\
 & 2 & \\
\times & 12 & \\ \hline
 & 24 \textit{ lín.} & \\
 & 3 &
\end{array}$$

Luego $\frac{9}{7}$ de *vara* = 1 *vara*, 0 *piés*, 10 *pulgadas*, 3 $^{3}/_{7}$ *lín.*

Propongámonos en segundo lugar reducir á complejo el quebrado $\frac{4}{7}$ de fanega superficial. Dispuesta la operacion como arriba, se tiene

$$\begin{array}{rl|l}
 & 4 \textit{ f. sup.} & 7 \\ \cline{3-3}
\times & 12 & 6 \text{ cel. sup.}, 41 \text{ est. cuad.}, 2 \text{ var. cuad.}, 2\,{}^{4}/_{7} \text{ piés c.} \\ \hline
 & 48 \textit{ celem.} & \\
 & 6 & \\
\times & 48 & \\ \hline
 & 288 \textit{ est. cuad.} & \\
 & 1 & \\
\times & 16 & \\ \hline
 & 16 \textit{ var. cuad.} & \\
 & 2 & \\
\times & 9 & \\ \hline
 & 18 \textit{ piés cuad.} &
\end{array}$$

Luego $\frac{4}{7}$ de *fanega superficial* equivalen á 6 *celemines superficiales, 41 estadales cuadrados, 2 varas cuadradas,* 2 $^{4}/_{7}$ *piés cuadrados.*

Reduccion de unidades de especie inferior á números complejos.

242. *Para reducir un número de unidades de especie inferior á complejo, se divide el número dado por el número de veces que una de las unidades que se nos dan está contenida en la especie inmediata superior; el resto serán las unidades de la especie dada, y el cociente las de especie superior. Haciendo lo mismo con el cociente y continuando de este modo hasta llegar al órden superior, tendremos el número reducido á complejo.*

Supongamos se quiere reducir á complejo el número 34789 adarmes.

Dispuesta la operacion del modo siguiente, se tendrá

34789 *ads.*	16		
27	2174 *onzas.*	16	
118	57	135 *libs.*	25
69	94	10 *libs.*	5 *ar.*
5 *ads.*	14 *onzas.*		

Como la onza tiene 16 adarmes, cuantas veces el número 16 esté contenido en el propuesto, tantas onzas habrá; luego dividiendo el número propuesto por 16, el cociente expresará las onzas que contiene aquel, y el resto serán las unidades de la especie dada del complejo que se busca. Haciendo lo mismo con las demas especies, hallamos que 34789 adarmes equivalen á 5 *arrobas, 10 libras, 14 onzas,* 5 *adarmes.*

Del mismo modo se verá que 3472 maravedís equivalen á 5 *duros,* 2 *reales,* 4 *maravedís.*

Sea, por último, el número 324572 piés cuadrados el que tratamos reducir á complejo. Recordando que una vara cuadrada tiene 9 piés cuadrados, que un estadal cuadrado tiene 16 varas cuadradas, que un celemin superficial tiene 48 estadales cuadrados, y que una fanega superficial tiene 12 celemines, se tendrá

324572 *p. c.*	9			
54	36063 *v. c.*	16		
057	40	2253 *est. c.*	48	
32	86	333	46 *cel. s.*	12
5 *p. c.*	63	45 *est. c.*	10 *cel. s.*	3 *f. s.*
	15 *v. c.*			

Luego 324572 *piés cuadrados* equivalen á 3 *fanegas superficiales*, 10 *celemines superficiales*, 45 *estadales cuadrados*, 15 *varas cuadradas* y 5 *piés cuadrados*.

Reduccion de números complejos á incomplejos.

243. *Para reducir un número complejo á incomplejo se multiplican las unidades de especie superior por las veces que una contiene á la inmediata inferior, se agrega á este producto las que de esta segunda especie haya en el número dado, se hace lo mismo con el número que resulta, y así se continúa hasta llegar á la última. El último número hallado será el incomplejo que se busca.*

Si no se quiere referir el número á la menor de sus especies, *se pone por denominador al número que resulta, el número de veces que esta especie inferior está contenida en la que se quiere referir.*

Sea, por ejemplo, reducir el complejo 8 *duros*, 12 *reales* y 26 *maravedís* á incomplejo de *reales*.

Como un duro tiene 20 reales, 8 duros tendrán 8 multiplicado por 20, igual 160 reales; agregando los 12 que hay en el complejo se obtienen 172 reales, que multiplicados por 34 maravedís que tiene un real y agregando al producto que se obtenga los 26 maravedís del complejo, obtendremos el valor de dicho complejo en unidades de la ínfima especie; pero como se quiere referir á la unidad real, pondremos por denominador al número hallado, los 34 maravedís que tiene un real.

Se dispondrá la operacion del modo siguiente:

$$\begin{array}{r l}
 & 8 \textit{ duros, } 12 \textit{ reales, } 26 \textit{ maravedís.} \\
\times\ 20 & \\
\hline
160 & \\
+\ 12 & \\
\hline
172 & \textit{reales.} \\
\times\ 34 & \\
\hline
688 & \\
516 & \\
\hline
5848 & \\
+\ 26 & \\
\hline
=5774 & \textit{maravedís.}
\end{array}$$

Luego 8 *duros*, 12 *reales*, 26 *maravedís* $= \frac{5874}{34}$ *rs.* $=$ $\frac{2937}{17}$ *rs.* $= 172\ {}^{13}/_{17}$ *reales.*

Adicion de los números complejos.

244. *Para sumar números complejos, se ponen unos debajo de otros de modo que se correspondan las unidades de una misma especie, se tira una raya por debajo y se suman todos los diferentes órdenes principiando por el menor, teniendo cuidado de reservar de cada suma las unidades que resulten de especie superior para unirlas á su especie, escribiendo solamente las restantes.*

Supongamos que se quiere sumar los complejos 12 *duros*, 18 *reales*, 24 *maravedís;* 8 *duros*, 12 *reales*, 30 *maravedís;* 15 *duros*, 15 *reales*, 16 *maravedís*, y 18 *duros*, 12 *reales*, 20 *maravedís.*

Dispuesta la operacion como sigue y efectuada la suma, se tendrá:

12 *duros,*	18. *reales,*	24 *mrs.*
8	12	30.
15	15.	16.
18	12	20
55 *duros,*	19 *reales,*	22 *mrs.*

Cuyo resultado se halla diciendo: 24 y 30 son 54, que componen un real, que se marca con un punto, y sobran 20; 20 y 16 son 36 maravedís, que componen un real y sobran 2; 2 y 20 son 22, que se colocan en su lugar: contando los puntos se hallan dos que indican reales, los cuales unidos á su especie obtenemos del mismo modo 19 reales y 2 duros, que sumados con su especie dan 55. Luego la suma de los números propuestos es 55 *duros*, 19 *reales* y 22 *maravedís*.

Tambien se puede efectuar la suma de números complejos, reduciendo éstos á incomplejos de cualquiera de sus especies, y efectuando la suma de los números concretos que resulten.

Sustraccion de los números complejos.

245. *Para restar números complejos se escribe el minuendo y debajo el sustraendo de modo que se correspondan las unidades de una misma especie, se tira una raya por debajo y se resta de cada órden del minuendo su correspondiente del sustraendo principiando por la derecha. Si de alguna especie del minuendo no se puede restar su correspondiente del sustraendo, se toma una unidad del órden superior y se descompone en unidades de la especie que nos hace falta, teniendo cuidado de considerar con una unidad ménos aquella de la cual se tomó.*

EJEMPLOS. 1.°

13 *duros*,	15 *reales*,	24 *mrs.*
—12	8	16
= 1 *duros*,	7 *reales*,	8 *mrs.*

2.° Restar de 12 *varas*, 1 *pié*, 2 *pulgadas*, el número 8 *varas*, 2 *piés*, 8 *pulgadas* y 10 *líneas*.

Se tendrá

12 *varas*,	1 *pié*,	2 *pulgadas*	
— 8	2	8	10 *lín.*
= 3 *varas*,	1 *pié*,	5 *pulgadas*,	2 *lín.*

3.° De 38 *arrobas*, queremos restar el número complejo 12 *arrobas*, 15 *libras*, 12 *onzas*.

Tendremos

38 *arrobas*
— 12 *arrobas*, 15 *libras*, 12 *onzas*.
= 25 *arrobas*, 9 *libras*, 4 *onzas*.

En este último ejemplo, como el minuendo no contiene más que arrobas y el sustraendo tiene ademas libras y onzas, hemos tenido que descomponer mentalmente una arroba de las 38, en 25 libras; de las que se han dejado 24 en su lugar y la restante se ha reducido á onzas, de las cuales hemos restado 12, obteniendo 4 de resta. Restando 15 libras de las 24 que dejamos en su lugar, hallamos la resta 9; y por último, restando 12 arrobas de las 37 que quedaron, se obtiene el resultado final 25 *arrobas*, 9 *libras* y 4 *onzas*.

Tambien se pueden restar los números complejos, reduciéndoles á incomplejos de una misma especie, y efectuando la resta de los números concretos que resulten.

LECCION XXVI.

Multiplicacion de números complejos. — Division de números complejos.

Multiplicacion de números complejos.

246. La multiplicacion de números complejos puede considerarse como el resultado de la resolucion de un problema que generalmente tiene por objeto hallar el valor de varias unidades de una misma naturaleza, conociendo el de una de ellas. Por consiguiente queda reducido á hallar un número que sea respecto del multiplicando lo que el multiplicador es de la unidad cuyo valor se conoce.

La multiplicacion de complejos puede efectuarse de dos modos: ó convirtiendo los complejos en incomplejos, y queda reducido á multiplicar dos números concretos (36), ó efectuando la multiplicacion directamente por el método llamado de las *partes alícuotas*.

En la multiplicacion de complejos distinguiremos varios casos: 1.°, multiplicar un complejo por un incomplejo de la especie de unidades cuyo valor se conoce; 2.°, multiplicar un complejo por un incomplejo de especie superior que aquella cuyo valor se conoce; 3.°, multiplicar un complejo por un incomplejo de especie inferior que aquella cuyo valor se conoce; 4.°, multiplicar un complejo por otro.

PRIMER CASO. *Para multiplicar un número complejo por un incomplejo de la especie cuyo valor se conoce, se multiplican todos los órdenes del complejo por el incomplejo, principiando por el inferior, y si alguno de estos productos componen alguna unidad del órden superior, se agrega al de su especie.*

En efecto, el problema que generalmente se resuelve en este caso, es, dado el valor de una unidad, hallar el de varias; de modo que repitiendo el valor de una tantas veces como unidades se nos dan, tendremos lo que se pide; y como para multiplicar una suma por un número se multiplican por dicho número todos los sumandos (52), se sigue que el número obtenido segun la regla será el verdadero.

Sea, por ejemplo, hallar el valor de 24 *arrobas*, sabiendo que una vale 12 *duros*, 8 *reales*, 12 *maravedís*.

Dispuesta la operacion como sigue, se tendrá

	12 *duros*,	8 *reales*,	12 *maravedís*.
× 24			
	10	8	48
	48	192	24
	24	200 | 20	288 | 34
		10	16 8
	298 *duros*,	0 *reales*,	16 *maravedís*.

El producto de 12 maravedís por 24 es 288 maravedís, que componen 8 reales y 16 maravedís; éstos se escriben en su lugar, y los 8 reales se unen con el producto de 8 reales por 24, lo que da 200 reales, que componen 10 duros, los cuales unidos al producto de 12 por 24 dan por resultado 298 duros.

Segundo caso. *Para multiplicar un complejo por un incomplejo de especie superior que aquella cuyo valor se conoce, se reduce el multiplicador á la especie de unidades cuyo valor es conocido, y se halla el producto como en el caso anterior.*

Sea, por ejemplo, hallar el valor de 6 *quintales*, sabiendo que la arroba cuesta 12 *duros*, 8 *reales*, 12 *maravedís*.

Como 6 *quintales* equivalen á 24 *arrobas*, queda reducido á multiplicar 12 *duros*, 8 *reales* y 22 *maravedís* por 24 *arrobas*, cuyo producto hemos visto que es 298 *duros*, 0 *reales*, 16 *maravedís*.

Tercer caso. *Para multiplicar un complejo por un incomplejo de especie inferior que aquella cuyo valor se conoce, se descompone el multiplicador en partes alícuotas de la unidad cuyo valor es conocido, y hallando estas partes alícuotas del multiplicando, su suma será el producto.*

Ejemplo. Si una vara cuesta 8 *duros*, 6 *reales*, 24 *maravedís*, ¿cuánto costarán 7 *pulgadas?*

Dispondremos la operacion del modo siguiente:

	8 *duros*,	6 *reales*,	24 *mrs*.
	× 7 *pulgadas*.		
		1	1
Valor de 6 *pulgadas*.	1 *duro*,	7 *reales*,	$26\ ^2/_3$ *mrs*.
Id. de 1 *id*.		4	$21\ ^4/_9$
Valor de 7 *pulgadas*.	1 *duro*,	12 *reales*,	$14\ ^1/_9$ *mrs*.

Como 7 pulgadas no es parte alícuota de la vara, que tiene 36 pulgadas, le descomponemos en 6 + 1; y como 6 pulgadas es la sexta parte de la vara, tomando la sexta parte del multiplicando tendremos el valor de 6 *pulgadas;* tomando en seguida la sexta parte del resultado, hallaremos el valor de una pulgada, y sumando los dos números se tiene lo que se pide.

Cuarto caso. *Para multiplicar un complejo por otro, se reducen las unidades superiores que aquella cuyo valor se conoce á esta especie, y se efectúa el producto del multiplicando por el número que resulta; despues se toma del multiplicando las partes alícuotas de la unidad principal que nos indiquen las de-*

mas especies del multiplicador, y la suma de todos estos productos parciales será el resultado pedido.

Sea, por ejemplo, hallar el valor de 3 *quintales*, 2 *arrobas*, 8 *libras*, 12 *onzas*, costando la arroba 12 *duros*, 8 *reales*, 18 *maravedís*.

Reducidos los quintales á la especie arrobas, se tiene

		12 *dur.*,	8 *rs.*,	18 *mrs.*
		14 *arbs.*,	8 *lib.*,	12 *onz.*
Valor de 14 *arrobas*.		173 *dur.*,	19. *rs.*,	14 *mrs.*
Id. de 8 *lib.*	5 *lib.*	2	9	24.
	3 *lib.* { 1 *lib.* . .	0	9.	32.
	1 » .	0	9	32.
	1 » .	0	9.	32
Id. de 12 *onz.*	8 *onz.*	0	4	33.
	4 »	0	2	16. $^1/_2$
Valor pedido. . .		178 *dur.*,	6 *rs.*,	13 $^1/_2$ *ms.*

Aplicando á este ejemplo el método de reduccion á incomplejos, se tendrá (243)

$$12 \textit{ duros}, 8 \textit{ reales}, 18 \textit{ maravedís} = 8450 \textit{ maravedís}.$$

$$3 \textit{ quint.}, 2 \textit{ ar.}, 8 \textit{ lib.}, 12 \textit{ onz.} = \frac{5740}{400} = \frac{574}{40} = \frac{287}{20} \textit{ ar.}$$

de modo que multiplicando 8450 *maravedís* por $\frac{287}{20}$ *arrobas*, tendremos

$$8450 \textit{ mrs.} \times \frac{287}{20} = \frac{8450 \times 287 \textit{ mrs.}}{20} = \frac{2425150 \textit{ mrs.}}{20} =$$

$$\frac{242515 \textit{ mrs.}}{2} = 121257\ ^1/_2 \textit{ mrs.},$$

y reduciendo á complejo este número de maravedís, se tendrá el número 178 *duros*, 6 *reales*, 13 $^1/_2$ *maravedís*, que es el producto pedido.

Division de complejos.

247. En la division de complejos distinguiremos dos casos principales: que los complejos sean de una misma naturaleza, ó de naturaleza distinta.

Primer caso. *Para dividir un complejo por otro de la misma naturaleza, se reducen ámbos á incomplejos de una misma especie, y se dividen como números abstractos.*

Ejemplo. Si con 8 *duros*, 12 *reales* y 24 *maravedís* se compra una arroba; con 37 *duros*, 8 *reales*, 15 *maravedís*, ¿cuántas se comprarán?

Reduciendo ámbos complejos á incomplejos de maravedí, se halla

8 *dur.*, 12 *rs.*, 24 *mrs.* = 5872 *mrs.*
37 *dur.*, 8 *rs.*, 15 *mrs.* = 25447 *mrs.*

Costando una *arroba* 5872 maravedís, con 25447 se podrán comprar tantas, cuantas veces el valor de una esté contenido en el segundo número; luego efectuando la division y valuando el resto en complejo de arroba, se tendrá

$$
\begin{array}{rl|l}
25447 & \textit{arbs.} & 5872 \\
\cline{3-3}
1959 & & 4\ \textit{arbs.},\ 8\ \textit{lib.},\ 5\ \textit{onz.},\ 7\tfrac{55}{367}\ \textit{ad.} \\
\times 25 & & \\
\hline
9795 & & \\
3918 & & \\
\hline
48975 & \textit{lib.} & \\
1999 & & \\
\times 16 & & \\
\hline
11994 & & \\
1999 & & \\
\hline
31984 & \textit{onz.} & \\
2624 & & \\
\times 16 & & \\
\hline
15744 & & \\
2624 & & \\
\hline
41984 & \textit{ad.} & \\
880 & &
\end{array}
$$

248. *Para dividir un complejo por otro de distinta naturaleza se reducen el primero á incomplejo de cualquiera de sus especies, y el segundo, que es el divisor, á incomplejo de la especie de unidad cuyo valor se quiere hallar; el cociente de estos*

dos números expresará el valor pedido en unidades de la especie á que se redujo el dividendo.

EJEMPLO. Se quiere saber el valor de una arroba, en el supuesto de que 14 *arrobas*, 8 *libras* y 12 *onzas* han costado 178 *duros*, 9 *reales*, 14 $^1/_2$ *maravedís.*

Reduciendo el dividendo á la especie de *maravedí*, y el divisor á la especie de *arroba*, que es la unidad cuyo valor se quiere hallar, tendremos

$$178 \textit{ duros, } 6 \textit{ reales, } 13\ ^1/_2 \textit{ mrs.} = \frac{242515}{2} \textit{ maravedís.}$$

$$14 \textit{ arrobas, } 8 \textit{ libras, } 12 \textit{ onzas} = \frac{5740}{400} = \frac{287}{20} \textit{ arrobas.}$$

Dividiendo el primer número por el segundo, tendremos el valor de una arroba expresado en maravedís: así,

$$\frac{242515}{2} : \frac{287}{20} = \frac{242515 \times 20}{2 \times 287} = \frac{2425150}{287} = 8450 \textit{ mrs.};$$

y reduciendo el número 8450 maravedís á complejo, hallaremos (242) para valor de la arroba el número 12 *duros*, 8 *reales*, 18 *maravedís*.

Tambien podria efectuarse directamente la division de complejos; pero los cálculos serian en general sumamente pesados, por lo que rara vez se practica de este modo.

Sistema Métrico.

LECCION XXVII.

Unidades principales del sistema métrico; sus múltiplos y divisores.

Unidades principales del sisma métrico; sus múltiplos y divisores.

249. SISTEMA MÉTRICO es el conjunto de unidades que teniendo por base el *metro*, que es una longitud igual á la *diezmillonésima* parte del cuarto del meridiano terrestre que pasa por París, sirve para apreciar y medir las cantidades.

Se le llama tambien *decimal*, porque los múltiplos y divisores de las *unidades principales* se forman multiplicando ó partiendo éstas por la unidad seguida de uno, dos ó más ceros.

Siete son tambien, como en el sistema antiguo, las diferentes clases de unidades del *sistema legal métrico*.

Unidades de *longitud*, de *superficie*, de *volúmen*, de *capacidad*, de *peso*, de *tiempo* y de *numerario*.

La unidad principal en las medidas *lineales* ó de *longitud* es el METRO, que como ya hemos dicho es la *diezmillonésima* parte del cuarto del meridiano terrestre que pasa por Paris (*).

La unidad principal de *superficie* es el ÁREA, que es un cuadrado que tiene por lado *diez metros*. Tambien suele tomarse por unidad principal de superficies el *metro cuadrado*, en cuyo caso sus múltiplos y divisores son los diferentes cuadrados que tienen por lado las diferentes unidades lineales de que hablaremos más adelante.

La unidad principal de *volúmen* es el METRO CÚBICO.

La unidad principal de *capacidad* es el LITRO, que es una medida cúbica ó cilíndrica cuya capacidad es de un volúmen igual á un cubo que tiene por lado la *décima* parte del metro.

La unidad principal de *peso*, es el GRAMO, que es el peso en el vacío del agua destilada á la temperatura de 4 grados del termómetro centígrado, que cabe en un vaso cúbico cuyas dimensiones interiores son la *centésima* parte de un metro.

Las unidades de tiempo son las mismas que ya hemos explicado en el sistema antiguo de pesas y medidas (236).

La unidad principal *monetaria* ó de *numerario* es el ESCUDO, que tiene 10 reales.

250. Los múltiplos de una unidad principal, á excepcion del escudo y unidades de tiempo, se expresan anteponiendo al nombre de la unidad principal correspondiente, cada una de las siguientes palabras griegas: DECA, HECTO, KILO, MIRIA, que equivalen respectivamente á *diez*, *ciento*, *mil*, *diez mil* unidades principales.

Los divisores se expresan anteponiendo á la unidad principal

(*) Para comprender bien las medidas de longitud, superficie y volúmen, véanse las ligeras nociones de geometria, al final del apéndice.

las palabras latinas DECI, CENTI, MILI, que equivalen respectivamente á la *décima, centésima, milésima* parte de la unidad principal.

UNIDADES DE LONGITUD. Las unidades ó medidas de longitud son el METRO y sus múltiplos y divisores.

Los múltiplos del metro son:

El DECÁMETRO = 10 *m.*

El HECTÓMETRO = 10 *Dm.* = 100 *m.*

El KILÓMETRO = 10 *Hm.* = 100 *Dm.* = 1000 *m.*

El MIRIÁMETRO = 10 *Km.* = 100 *Hm.* = 1000 *Dm.* = 10 000 *m.*

Los divisores del metro son:

El DECÍMETRO = 0,1 *m.*

El CENTÍMETRO = 0,1 *dm.* = 0,01 *m.*

El MILÍMITRO = 0,1 *cm.* = 0,01 *dm.* = 0,001 *m.*

El *kilómetro* y *miriámetro* sirven para medir grandes distancias, y reemplazan á las leguas y millas del sistema antiguo; el *metro* reemplaza á la vara.

UNIDADES DE SUPERFICIE. Las unidades ó medidas de superficie son los diferentes cuadrados que tienen por lado las diferentes unidades lineales.

La unidad fundamental es el METRO CUADRADO.

Los múltiplos del metro cuadrado son:

El DECÁMETRO CUADRADO = 100 m^2.

El HECTÓMETRO CUADRADO = 100 Dm^2. = 10 000 m^2.

El KILÓMETRO CUADRADO = 100 Hm^2. = 10 000 Dm^2.

El MIRIÁMETRO CUADRADO = 100 Km^2. = 10 000 Hm^2.

Los divisores del metro cuadrado son:

El DECÍMETRO CUADRADO = 0,01 m^2.

El CENTÍMETRO CUADRADO = 0,01 dm^2. = 0,0001 m^2.

El MILÍMETRO CUADRADO = 0,01 cm^2. = 0,0001 dm^2.

Las unidades métricas cuadradas siguen la misma relacion que las del sistema antiguo; es decir, que una cualquiera contiene á otra de especie inferior un número de veces igual al *cuadrado* del número de veces que la unidad lineal correspondiente á la primera contiene á la lineal correspondiente á la segunda.

Las medidas de superficie llamadas *agrarias* son las que se emplean en la medicion de los campos, las cuales son el *área*, que es un *decámetro cuadrado*, ó sea un cuadrado que tiene por lado un *decámetro*, y que por consiguiente equivale (238) á 100 *metros cuadrados*.

Usanse ademas un múltiplo y un divisor del *área*, que son la *hectárea* y la *centiárea*.

La HECTÁREA equivale á 100 *áreas* ó sean 10 000 m^2.

Y la CENTIÁREA equivale á 0,01 de *área*, ó sea á un *metro cuadrado*.

Es necesario no confundir un *decámetro cuadrado* con *diez metros cuadrados*, pues un decámetro cuadrado expresa un cuadrado que tiene por lado diez metros, y que por consiguiente equivale á 100 metros cuadrados, número diez veces mayor que diez metros cuadrados. Del mismo modo no se debe confundir un *decímetro*, *centímetro*, etc. *cuadrados* con un décimo, céntimo, etc. de metro cuadrado, porque son cosas muy diferentes.

UNIDADES DE VOLÚMEN. Las unidades ó medidas de volúmen son los diferentes cubos que tienen por lado las diferentes unidades lineales.

La unidad fundamental es el METRO CÚBICO, que es un cubo que tiene por lado un *metro*.

Los múltiplos del metro cúbico son:

El DECÁMETRO CÚBICO $= 1000\ m^3$.

El HECTÓMETRO CÚBICO $= 1000\ Dm^3. = 1000\,000\ m^3$.

El KILÓMETRO CÚBICO $= 1000\ Hm^3. = 1000\,000\ Dm^3$.

Los divisores del metro cúbico son:

El DECÍMETRO CÚBICO $= 0{,}001\ m^3$.

El CENTÍMETRO CÚBICO $= 0{,}001\ dm^3. = 0{,}000\,001\ m^3$.

El MILÍMETRO CÚBICO $= 0{,}001\ cm^3. = 0{,}000\,001\ dm^3$.

Lo mismo que en el sistema antiguo, se verifica que una unidad cúbica cualquiera contiene á otra de especie inferior un número de veces igual al cubo del número de veces que la unidad lineal correspondiente á la primera contiene á la lineal correspondiente á la segunda (239).

Tampoco hay que confundir un *decámetro cúbico*, por ejemplo, con *diez* metros cúbicos; ni un *decímetro cúbico* con un décimo de metro cúbico, pues son cosas muy distintas.

El *metro cúbico* se suele llamar ESTÉRIO, y de esta unidad como principal se consideran un múltiplo y un divisor, que son el DE-

CASTÉRIO = 10 *estérios*; y el DECISTÉRIO, igual á la décima parte de un *estério*.

Tambien se usan el *medio decastério* y el *doble estério*.

UNIDADES DE CAPACIDAD. Sirven para medir los *áridos* y *líquidos*. La unidad principal es el LITRO.

Sus múltiplos son:

El DECÁLITRO = 10 *l*.

El HECTÓLITRO = 10 *Dl*. = 100 *l*.

El KILÓLITRO = 10 *Hl*. = 100 *Dl* = 1000 *l*.

Los divisores del litro son:

El DECÍLITRO = 0,1 *l*.

El CENTÍLITRO = 0,1 *dl*. = 0,01 *l*.

El *litro* y *decálitro* reemplazan al *cuartillo* y *cántara*.

El *hectólitro* á la *fanega*.

Como las medidas de capacidad aprecian el volúmen de la materia que contienen, hay una relacion entre ellas y las unidades de volúmen: así,

El *kilólitro* = 1000 *l*. equivale á un metro cúbico.

El *hectólitro* = 100 *l*. equivale á un décimo de metro cúbico.

El *decálitro* = 10 *l*. equivale á un céntimo de metro cúbico.

El *litro* = 1 *l*. equivale á un decímetro cúbico.

El *decílitro* = 0,1 *l*. á un décimo de decímetro cúbico.

El *centílitro* = 0,01 *l*. equivale á un céntimo de decímetro.

El *milílitro* = 0,001 *l*. equivale á un centímetro cúbico.

UNIDADES DE PESO. Sirven para apreciar el de los cuerpos.

La unidad principal de peso es el GRAMO, que es lo que pesa en el vacío un *centímetro cúbico* de agua destilada á la temperatura de 4 grados centígrados.

Los múltiplos del gramo son:

El DECÁGRAMO = 10 *g*.

El HECTÓGRAMO = 10 *Dg*. = 100 *g*.

El KILÓGRAMO = 10 *Hg*. = 100 *Dg*. = 1000 *g*.

El MIRIÁGRAMO = 10 *Kg*. = 100 *Hg*. = 1000 *Dg*. = 10 000 *g*.

Los divisores del gramo son:

El DECÍGRAMO = 0,1 *g*.

El CENTÍGRAMO = 0,1 *dg*. = 0,01 *g*.

El MILÍGRAMO = 0,1 *cg*. = 0,01 *dg*. = 0,001 *g*.

El MIRIÁGRAMO rara vez se usa: se expresa siempre por *diez kilógramos*.

Hay ademas otros dos múltiplos, que son: el *quintal métrico* igual á 100 *Kg.*, y la *tonelada de peso* = 1000 *Kg.*

La unidad usual en el comercio es el *kilógramo*.

UNIDADES DE TIEMPO. Son las que sirven para apreciar el que trascurre de un acontecimiento á otro, y son las consideradas en el sistema antiguo (236).

UNIDADES DE NUMERARIO. Son las que pertenecen al dinero, y sirven para valorar las cosas. La unidad principal es el ESCUDO, que equivale á 10 reales. Tambien se usa como unidades principales el *real* y el *duro* ó *peso fuerte*, que tiene 2 escudos, ó sean 20 reales.

Las monedas que se acuñan desde que rige la ley de 26 de Junio de 1864, publicada en la *Gaceta* del 28 del mismo mes y año, son:

MONEDAS DE ORO. El doblon de Isabel, que vale 10 escudos, ó sean 100 reales. El doblon de *cuatro escudos*, que equivale á 40 reales. El doblon de *dos escudos*, ó sea de 20 reales.

MONEDAS DE PLATA. El *duro* ó *peso fuerte*, que tiene 2 escudos, ó sean 20 reales. El *escudo*, unidad principal, que equivale á 10 reales. La *peseta*, que equivale á 40 céntimos de escudo, ó sea 4 reales. La *media peseta*, que equivale á 20 céntimos de escudo, ó sean 2 reales. El *real*, que equivale á 10 céntimos de escudo.

MONEDAS DE BRONCE. El *medio real*, que equivale á 5 céntimos de escudo. El *cuartillo*, que equivale á 25 milésimas de escudo. La *décima*, que equivale á 1 céntimo de escudo. La *media décima*, que equivale á 5 milésimas de escudo.

Ademas de estas monedas, hay de las acuñadas anteriormente:

DE ORO. La *onza*, que tiene 16 duros, ó sean 32 escudos, ó 320 reales.

La *media onza*, que tiene 8 duros, ó sean 16 escudos, ó 160 reales. El *doblon ochentin*, que equivale á 4 duros ó sean 8 escudos, ó bien 80 reales. El *escudo* de 2 duros, que equivale á 4 escudos, ó sean 40 reales. El *escudito* de 1 duro, ó sean 2 escudos, ó 20 reales. La *coronilla* de premio, que tiene 21 reales y cuartillo.

De plata. El *duro mejicano* de 21 reales y cuartillo. La *peseta columnaria* de 50 céntimos de escudo, ó sean 5 reales. La *media peseta columnaria*, que equivale á 25 céntimos de escudo, ó sean 2 $^1/_2$ reales. El *real columnario*, que equivale á 125 milésimas de escudo, ó sea 1 real y cuartillo.

De cobre. La *pieza de dos cuartos*, que equivale á 8 maravedís; el *cuarto*, á 4 maravedís; el *ochavo*, á 2 maravedís; el *maravedí*, moneda que ya no existe y equivale próximamente á 3 céntimos de real.

LECCION XXVIII.

Reduccion de unidades de una especie cualquiera á otras de especie inferior ó superior. — Reduccion de números métricos complejos á incomplejos. — Reduccion de números métricos incomplejos á complejos. — Cálculo de las cuatro operaciones fundamentales con números métricos.

Reduccion de unidades de una especie cualquiera á otras de especie inferior ó superior.

251. *Para reducir un número de unidades de una especie cualquiera á otras de especie inferior ó superior, se multiplica ó parte dicho número por la unidad seguida de tantas veces un cero, dos ó tres, como órdenes de unidades hay entre la especie á que está referido el número y aquella que se quiere referir inclusive, segun que el número sea de unidades de longitud, capacidad ó peso, de unidades cuadradas, ó de volúmen.*

En efecto, este problema no es más que una de las aplicaciones de la multiplicacion ó division (40 y 41).

Ejemplos. 1.° Reducir el número 387,346 *Km.* á *metros.*

Del kilómetro al metro inclusive hay *tres* órdenes de unidades; luego habrá que multiplicar por la unidad seguida de *tres* ceros, ó lo que es lo mismo (193) correr la coma *tres* lugares á la derecha. De modo que

$$387{,}346\ Km. = 387346\ metros.$$

2.° Reducir á *gramos* el número 346 *hectógramos.*

Como del *hectógramo* al *gramo* inclusive hay *dos* órdenes de unidades, se tiene que multiplicar por la unidad seguida de *dos* ceros, lo cual dará

$$346\ Hg. = 34600\ gramos.$$

3.° Reducir á *decálitros* 385,347 *Kl.*

Multiplicando por la unidad seguida de dos ceros, se tendrá

$$385{,}347\ Kl. = 38534{,}7\ Dl.$$

4.° Reducir á *quintales métricos* el número 3475432 *gramos.*

Del gramo al quintal métrico inclusive hay *cinco* órdenes de unidades; luego tendremos que dividir el número por la unidad seguida de *cinco* ceros, lo que da

$$3475432\ g. = 34{,}75432\ Qm.$$

5.° Reducir á *kilómetros cuadrados* el número 34705 *metros cuadrados.*

Como los órdenes de unidades que hay entre el metro y el kilómetro son tres, tendremos que dividir el número por la unidad seguida de *seis* ceros: así

$$34705\ m^2. = 0{,}034705\ Km^2.$$

6.° Reducir 33 *metros cúbicos* á *centímetros cúbicos.*

Se tendrá que multiplicar el número 33 por la unidad seguida de *seis* ceros, porque cada unidad cúbica del sistema métrico equivale á 1000 de la especie inferior y á 1 000 000 de la siguiente: luego

$$33\ m^3. = 33\,000\,000\ centímetros\ cúbicos.$$

Reduccion de números métricos complejos á incomplejos.

252. *Para reducir números métricos complejos á incomplejos de cualquiera de sus especies, se reducen primero las unidades de especie superior á la inmediata inferior, y se agregan al número que se obtiene las unidades que haya de esta especie. Se hace lo mismo con el número que resulta, y así se continúa hasta llegar á la última especie. El último número hallado equivale al número complejo reducido á la ínfima de sus especies. Si no es á la ínfima á la que se quiere referir, entónces se reduce el resultado á la especie que se quiera* (251).

Esta regla queda reducida en la práctica á colocar los diferentes órdenes de unidades del complejo unos á continuacion de otros, teniendo cuidado que entre cada dos consecutivos haya siempre un número de cifras igual al número de órdenes que hay entre el superior y el inferior inclusive, si el número es lineal de capacidad ó peso, y un número de cifras doble ó triple del dicho anteriormente, si las unidades son cuadradas ó de volúmen.

EJEMPLOS. 1.° Reducir á *kilómetros* el número complejo 38 *Mm.* 15 *Dm.* 6 *m.* 8 *cm.*

Reduciendo el complejo primeramente á incomplejo de la ínfima especie, se tendrá

$$38\,Mm.\quad 15\,Dm.\quad 6\,m.\quad 8\,cm. = 38015608\,cm.$$

Cuyo resultado se ha obtenido diciendo: 38 *miriámetros* reducidos á *decámetros* son 38000, y 15, que tiene el complejo, 38015 *decámetros;* este número reducido á *metros*, da 380150, al cual agregando los 6 que hay, se tiene el número 380156 *metros*. Por último, reduciendo este número á *centímentros* y agregando los 8 que tenemos, se obtiene el resultado 38015608 *cm.*

Reduciendo este número á kilómetros se tendrá 38015608 *cm.* equivalente á 380,15608 *Km.*; luego

$$38\,Mm.\quad 15\,Dm.\quad 6\,m.\quad 8\,cm. = 380,15608\,Km.$$

2.° Reducir el complejo 38 Mm^2. 15 Dm^2. 6 m^2. 8 cm^2. á *kilómetros cuadrados*. Reduciendo el complejo primeramente á incomplejo de la ínfima especie, se tendrá

$$38\,Mm^2.\quad 15\,Dm^2.\quad 6\,m^2.\quad 8\,cm^2. = 38\,000\,015\,060\,008\,cm^2.,$$

y refiriendo el resultado á incomplejo de *kilómetro*, se tiene

$$38\,000\,015\,060\,008\,cm^2. = 3800,0015060008\,Km^2.$$

3.° Reducir á metros cúbicos 32 Dm^3. 8 m^3. 133 cm^3.

El número propuesto reducido á *centímetros cúbicos* es 32008000133, y este número referido á *metros cúbicos* será 32008,000133 m^3.; luego

$$32\,Dm^3.\quad 8\,m^3.\quad 133\,cm^3. = 32008,000133\,m^3.$$

Reduccion de números métricos incomplejos á complejos.

253. *Para reducir un número métrico incomplejo á complejo, se divide el número, á partir de las unidades principales, en periodos de una, dos ó tres cifras, segun que sea de unidades de longitud, capacidad ó peso, de unidades cuadradas, ó de volúmen; y cada uno de estos periodos expresará los diferentes múltiplos y divisores de la unidad principal de que se compone el número.*

Ejemplos. 1.° Reducir á complejo el número 347,457 *Dm.*

Como los múltiplos y divisores siguen la ley decimal lo mismo que las unidades de un número, las decenas, centenas, etc. de este número expresarán múltiplos del decámetro, y cada cifra de la decimal indicará los divisores de la misma unidad decámetro: así,

$$347{,}457\ Dm. = 3\ Km.\quad 4\ Hm.\quad 7\ Dm.\quad 4\ m.\quad 5\ dm.\quad 7\ cm.$$

2.° Sea reducir el número 347,457 Dm^2. á número complejo.

Como cada unidad cuadrada se compone de ciento de la inmediata inferior, las centenas de un número métrico expresarán el múltiplo siguiente á la unidad á que se refiere el número, y las centésimas el inmediato divisor, de modo que se tendrá

$$347{,}457\ Dm^2. = 3\ Hm^2.\quad 47\ Dm^2.\quad 45\ m^2.\quad 70\ dm^2.$$

Observemos que cuando el número de cifras decimales no es par, se hace que lo sea agregando un cero á la derecha; porque despues de haberse considerado el penúltimo período, el divisor siguiente lo deben formar las centésimas de aquella especie, y por lo tanto ha de tener dos cifras.

3.° Reducir á complejo el número 30743,8305783 Hm^3.

Dividiendo este número en períodos de tres cifras, puesto que *mil* unidades de cada especie componen *una* de la siguiente, tendremos:

$$30743{,}8305783\ Hm^3. = 30\ Km^3.\quad 743\ Hm^3.\quad 830\ Dm^3.\quad 578\ m^3.\quad 300\ dm^3.$$

Tambien debemos observar que cuando el número de cifras decimales no es múltiplo de *tres*, hay que hacer que lo sea poniendo ceros á la derecha; pues el divisor siguiente al penúltimo lo ha de formar siempre las *milésimas* de éste.

Cálculo de las cuatro operaciones fundamentales con números métricos.

254. Como la conversion de los números métricos complejos á incomplejos es tan fácil y se obtiene con tanta prontitud, el cálculo de las cuatro operaciones fundamentales con números métricos complejos, se reduce á la de números enteros ó decimales concretos: así,

255. *Para sumar números métricos complejos ó incomplejos, se reducen á incomplejos de una misma especie y se efectúa la suma de los enteros ó decimales que resulten.*

Ejemplos. 1.° Sumar los números 32,346 *Kg.*; 426,32 *g.*; 0,8357 *Qm.*; 42,15 *Dg.*

Reduciendo estos números á una misma especie, á *gramos* por ejemplo, se tendrán los números 32346 *g.*; 426,32 *g.*; 83570 *g.*; 421,5 *g.*, que sumados nos dan

$$\begin{array}{r} 32346\ g. \\ 426{,}32 \\ 83570\phantom{{,}32} \\ 421{,}5 \\ \hline 116763{,}82\ g. \end{array}$$

Luego la suma de los números dados es 116763,82 *g.*, que equivale á 1 *Qm.* 16 *Kg.* 76 *Dg.* 382 *cg.*

2.° Sean los números que han de sumarse 12 *Kl.* 18 *Dl.* 24 *cl.*; 133 *Dl.* 18 *dl.*; 3 *Dl.* 18 *cl.*; 8 *Hl.* 12 *l.*

Reducidos á *centilitros* se tiene

$$\begin{array}{rcr} 12\,Kl.\ 18\,Dl.\ 24\,cl. & = & 1218024\ cl. \\ 133\,Dl.\ 18\,dl. & = & 133180 \\ 3\,Dl.\ 18\,cl. & = & 3018 \\ 8\,Hl.\ 12\,l. & = & 81200 \\ \hline \text{Suma pedida.}\ \ldots\ldots & & 1435422\ cl. = 14\,Kl.\ 35\,Dl.\ 4\,l.\ 22\,cl. \end{array}$$

256. *Para restar números métricos complejos ó incomplejos, se reducen á incomplejos de una misma especie y se restan los números que resulten.*

EJEMPLOS. 1.° Restar de 347,36 *Dm*^{2}.; 468,38 *m*^{2}.

Reduciendo el minuendo á *metros cuadrados*, que es á lo que está referido el sustraendo, y restando, se tendrá

$$\begin{array}{lll} 347{,}36\ Dm^2. & = & 34736\ m^2. \\ 468{,}38\ m^2. & = & 468{,}38 \\ \hline \text{Resta} \ldots & & 34267{,}62\ m^2. = 342\ Dm^2.\ 67\ m^2\ 62\ dm^2. \end{array}$$

2.° Del número 3 *Km*. 18 *Dm*. 34 *dm*. se quiere restar 18 *Hm*. 15 *m*. 32 *mm*.

Reduciendo ámbos á *milímetros*, y restando, se tendrá

$$\begin{array}{lll} 3\,Km.\,18\,Dm.\,34\,dm. & = & 3183400\,mm. \\ 18\,Hm.\,15\,m.\ 32\,mm. & = & 1815032 \\ \hline \text{Resta} \ldots\ldots & & 1368368\,mm. = 13\,Hm.\,68\,m.\,368\,mm. \end{array}$$

257. *Para multiplicar números métricos complejos ó incomplejos, se reduce el multiplicando, que es el de la especie que se busca en el problema, á incomplejo de una cualquiera de sus especies, y el multiplicador á incomplejo de la unidad cuyo valor se conoce, y se multiplican los números que resulten. El producto será de la misma especie que el multiplicando.*

EJEMPLOS. 1.° Un kilólitro pesa 13 *Qm*. 18 *Dg*. 39 *cg*., ¿cuánto pesarán 27 *Dl*. 32 *dl*.?

Reduciendo el multiplicando á *centigramos*, por ejemplo, y el multiplicador á la especie cuyo peso se da, que es el kilólitro, y multiplicando, se tendrá

$$\begin{array}{lr} 13\ Qm.\ 18\ Dg.\ 39\ cg. = & 13001\ 8039\ cg. \\ 27\ Dl.\ 32\ dl. = & 0{,}2732\ Kl. \\ \hline & 26003\ 6078 \\ & 390054\ 117 \\ & 9101262\ 73 \\ & 26003607\ 8 \\ \hline \text{Peso de 27 } Dl.\ 32\ dl. \ldots\ldots & 35520928{,}2548\ cg., \end{array}$$

ó lo que es lo mismo, 3 *Qm*. 55 *Kg*. 209 *g*. 28,2548 *cg*.

2.° Un *metro* vale 16 *rs.* 42 *c.*, ¿cuánto costarán 3 *Dm.* 47 *cm.*?

Reduciendo el multiplicando á *reales* y el multiplicador á *metros*, que es la unidad cuyo valor se conoce, y multiplicando, se tiene

16 *rs.* 42 *c.*	=	16,42 *rs.*
3 *Dm.* 47 *cm.*	=	30,47 *m.*
		1 1494
		6 568
		492 6
Valor de 3 *Dm.* 47 *cm.*		500,3174 *rs.* = 500 *rs.* 32 *c.* próxim.

358. *Para dividir números métricos complejos ó incomplejos, se reducen á una misma especie si son de igual naturaleza, y el cociente abstracto que resulta de dividir estos números, es el que se pide. Si el dividendo y divisor son de naturaleza distinta, se reduce el dividendo á incomplejo de cualquiera de sus especies, y el divisor á la especie de unidades cuyo valor se busca, el cociente de estos dos números será el que se pide, expresado en unidades de la especie que indica el dividendo.*

Ejemplos. 1.° Un *decálitro* pesa 6 *Kg.* 18 *g.*, ¿cuántos *decálitros* contendrá una carga que pesa 13 *Qm.* 42 *Dg.*?

Reduciendo á *gramos* el dividendo y divisor, y efectuando la division, se tendrá:

```
1300420      | 6018
             |--------
 9682          216,088
 36640
   53200
    50560
     24160
        88
```

Luego dicha carga contendrá 216 *Dl.* 884 *ml.*

2.° El valor de 3 *Dm.* 47 *cm.* es 500 *rs.* 32 *c.*, ¿cuánto costará un *metro*?

Reduciendo el dividendo á *reales* y el divisor á *metros*, unidad cuyo valor se busca, y efectuando la division, se tiene (200)

50032	3047
19562	16,42
12800	
6120	
26	

Luego el valor de un metro es 16 *rs.* 42 *c.* próximamente.

LECCION XXIX.

Relaciones entre las unidades del sistema antiguo de pesas y medidas y las del sistema nuevo métrico decimal. — Relaciones entre las unidades del nuevo sistema métrico decimal y las del antiguo sistema de pesas y medidas.—Reduccion de unidades del sistema antiguo de pesas y medidas á unidades métricas, y al contrario.

Relaciones entre las unidades del sistema antiguo de pesas y medidas y las del sistema nuevo métrico decimal.

259. Las relaciones que están dadas por la comision de pesas y medidas, y debidamente autorizadas por el gobierno, son las siguientes:

Medidas de longitud.

Una *legua* equivale á 5,572700 *Km.* = 5572,70 *m.*
Un *estadal* á...... 0,334362 *Dm.* = 334,362 *cm.*
Una *braza* á...... 0,167181 *Dm.* = 167,181 *cm.*
Una *vara* á....... 0,835905 *m.* = 835,905 *mm.*
Un *pié* á........ 0,278635 *m.* = 278,635 *mm.*
Una *pulgada* á.... 0,023220 *m.* = 23,220 *mm.*
Una *línea* á....... 0,001935 *m.* = 1,935 *mm.*
Un *punto* á....... 0,000161 *m.* = 0,161 *mm.*
Un *palmo* á...... 0,208976 *m.* = 208,976 *mm.*
Un *dedo* á....... 0,017414 *m.* = 17,414 *mm.*

Medidas de superficie.

Una *legua cuadrada* equivale á 31,054985 Km^2.
Una *fanega superficial* á 0,64395617 *Ha.* = 6439,4617 m^2.
Una *aranzada* á...... 0,447192 *Ha.* = 4471,92 m^2.
Un *celemin superficial* á 0,05366301 *Ha.* = 536,6301 m^2.

Un *cuartillo superficial* á 1,341575 *a*. = 134,1575 m^2.
Un *estadal cuadrado* á.. 0,111798 *a*. = 11,1798 m^2.
Una *vara cuadrada* á... 0,698737 m^2. = 6987,37 cm^2.
Un *pié cuadrado* á.... 0,077637 m^2. = 776,37 cm^2.
Una *pulgada cuadrada* á 0,000539 m^2. = 5,39 cm^2.
Una *línea cuadrada* á... 0,03 cm^2. = 3 mm^2.

Medidas de volúmen.

Una *vara cúbica* equivale á 0,5840777 m^3. ó *estérios*.
Un *pié cúbico* á 0,0216325 m^3. = 0,216325 *decistérios*.

Medidas de capacidad.

PARA ÁRIDOS.

Un *cahiz* equivale á 0,666012 *Kl*. = 666,012 *l*.
Una *fanega* á.... 0,055501 *Kl*. = 55,501 *l*.
Un *celemin* á..... 0,462508 *Dl*. = 462,508 *cl*.
Un *cuartillo* á.... 0,115627 *Dl*. = 115,627 *cl*.

PARA LÍQUIDOS, Á EXCEPCION DEL ACEITE.

Un *moyo* quivale á 0,25813 *Kl*. = 258,13 *l*.
Una *cántara* á... 0,016133 *Kl*. = 16,133 *l*.
Una *azumbre* á... 0,20166 *Dl*. = 2,0166 *l*. = 20,166 *dl*.
Un *cuartillo*. á... 0,50414 *l*. = 50,414 *dl*.
Una *copa* á..... 0,126 *l*. = 1,26 *dl*.

PARA ACEITE.

Una *arroba* equivale á 0,012563 *Kl*. = 12,563 *l*.
Una *libra* á....... 0,50252 *l*. = 5,0252 *dl*.
Una *panilla* á...... 0,12563 *l*. = 1,2563 *dl*.

Medidas de peso.

Una *tonelada de peso* antigua equivale á 0,920186 *toneladas* modernas.
Un *quintal* antiguo á 0,460093 *Qm*. = 46,0093 *Kg*.
Una *arroba* á 0,115023 *Qm*. = 11,5023 *Kg*. = 11502,3 *g*.
Una *libra* á.. 0,460093 *Kg*. = 460,093 *g*.
Una *onza* á.. 0,28756 *Hg*. = 2,8756 *Dg*. = 28,756 *g*.

Un *adarme* á 1,79724 *g.* = 17,9724 *dg.* = 179,724 *cg.*
Un *tomin* á.. 0,599079 *g.* = 5,99079 *dg.* = 59,9079 *cg.*
Un *grano* á.. 0,049923 *g.* = 0,49923 *dg.* = 4,9923 *cg.*
Una *libra* médica á 0,34507 *Kg.* = 3,4507 *Hg.* = 345,07 *g.*
Una *onza* á. . . . . 0,28756 *Hg.* = 2,8756 *Dg.* = 28,756 *g.*
Una *dracma* á.. . . 3,59477 *g.* = 35,94477 *dg.*
Un *escrúpulo* á. . . 1,198159 *g.* = 11,98159 *dg.*
Un *grano* á. . . . . 0,49923 *dg.* = 4,9923 *cg.*

Relaciones entre las unidades del nuevo sistema métrico decimal y las del antiguo sistema de pesas y medidas.

Medidas de longitud.

Un *milímetro* equivale á 0,003588924 *ps.* = 0,516805 *lín.*
Un *centímetro* á. . . . . . 0,03588924 *ps.* = 0,43067088 *pulg.*
Un *decímetro* á. . . . . . 0,3588924 *ps.* = 4,3067088 *pulg.*
Un *metro* á. . . . . 1,196308 *vs.* = 3,588924 *ps.*
Un *decámetro* á. . . . . . 11,96308 *vs.* = 430,67088 *pulg.*
Un *hectómetro* á.. . . . . 119,6308 *vs.* = 4306,7088 *pulg.*
Un *kilómetro* á. . . . . . 0,1794462 *leg.* = 3588,924 *ps.*
Un *miriámetro* á. . . . . 1,794462 *leg.* = 35889,24 *ps.*

Medidas de superficie.

Un *milímetro cuadrado* equivale á 0,267083 *lín. cuad.*
Un *centímetro* á 0,1854749 *pulg. c.* = 26,7083 *lín. c.*
Un *decímetro* á. 0,0143115 *v. c.* = 18,54749 *pg. c.*
Un *metro* á. . . 1,431153 *v. c.* = 1854,749 *pg. c.*
Un *decámetro* á. 8,9447 *est. c.* = 1288,037961 *p. c.*
Un *hectómetro* á 894,47 *est. c.* = 128803,7961 *p. c.*
Un *kilómetro* á. 89447,08 *est. c.* = 1288037961 *p. c.*
Una *centiárea* á 0,000155 *f. s.* = 0,08944708 *est. c.*
Una *área* á.. . . 0,015529 *f. s.* = 8,944708 *est. c.*
Una *hectárea* á. 1,5529 *f. s.* = 894,4708 *est. c.*

Medidas de volúmen.

Un *milímetro cúbico* equivale á 0,138 *líneas cúbicas.*
Un *centímetro* á . . . . 0,079 *pulgadas cúbicas.*

Un *decimetro* á. . . . . 0,046 *piés cúbicos.*
Un *metro* á. . . . . 1,712 *varas cúbicas.*
Un *decámetro* á. . . . . 1712,1 *varas cúbicas.*

Medidas de capacidad.

PARA ÁRIDOS.

Un *litro* equivale á 0,01801769 *f.* = 0,864849 *cuart.*
Un *decálitro* á. . . 0,1801769 *f.* = 8,64849 *cuart.*
Un *hectólitro* á. . . 1,801769 *f.* = 86,4849 *cuart.*
Un *kilólitro* á.. . . 18,01769 *f.* = 864,849 *cuart.*

PARA LÍQUIDOS, Á EXCEPCION DEL ACEITE.

Un *litro* equivale á 0,061985 *ar.* = 1,98351 *cuartillos.*
Un *decálitro* á.. . . 0,61985 *ar.* = 19,8351 *cuartillos.*
Un *hectólitro* á. . . 6,1985 *ar.* = 198,351 *cuartillos.*

PARA ACEITE.

Un *decílitro* equivale á 0,198997 *lb.* = 0,795988 *panillas.*
Un *litro* á. . . . . 1,989971 *lb.* = 7,959884 *p.*
Un *decálitro* á.. . . . . 19,89971 *lb.* = 79,59884 *p.*
Un *hectólitro* á.. . . . . 7,959884 *ar.* = 198,9971 *libras.*
Un *kilólitro* á. . . . . . 79,59884 *ar.* = 1989,971 *libras.*

Medidas de peso.

Un *miligramo* equivale á 0,02 *granos.*
Un *centigramo* á. . . . . . 0,2 *granos.*
Un *decígramo* á. . . . . . 0,0556 *adarmes* = 2 *granos.*
Un *gramo* á.. . . . . . . 0,035 *onzas* = 0,556 *adarmes.*
Un *decágramo* á. . . . 0,022 *lib.* = 0,35 *onzas* = 5,56 *ad.*
Un *hectógramo* á.. . . 0,2173 *lib.* = 3,5 *onzas* = 55,6 *ad.*
Un *kilógramo* á. . . . 2,173474 *libras.*
Un *quintal métrico* á. 8,694 *arrobas* = 217,3474 *libras.*
Una *tonelada* nueva á 86,94 *arrobas* = 2173,474 *libras.*

Reduccion de unidades del sistema antiguo de pesas y medidas á unidades métricas, y al contrario.

260. Por medio de las mutuas relaciones que anteriormente hemos escrito, y cálculos muy sencillos de multiplicar ó partir, podremos reducir un número complejo ó incomplejo de unidades del sistema antiguo á unidades del sistema nuevo métrico decimal, y al contrario.

Sea, por ejemplo, el número 3 *varas*, 2 *piés*, 7 *pulgadas* el cual queremos reducir á unidades métricas.

Como una *vara* equivale á 0,835905 *metros*.
3 *varas* equivaldrán á... 0,835905 × 3 = 2,507715 *metros*.
Un *pié* equivale á.... 0,278636 *m*.
2 *piés* equivaldrán á.... 0,278636 × 2 = 0,557272 *metros*.
Una *pulgada* equivale á 0,023220 *m*.
7 *pulgadas* equivaldrán á 0,023220 × 7 = 0,162540 *metros*.

Luego 3 *varas*, 2 *piés*, 7 *pulg*., equivalen á 3,227527 *metros*, ó lo que es igual 3 *v*. 2 *p*. 7 *pg*. = 3 *m*. 2 *dm*. 2 *cm*. 7,527 *mm*.

Sea, por segundo ejemplo, reducir 5 *m*. 72 *cm*. á unidades del sistema antiguo.

Un *metro* equivale á.... 3,5889 *piés*.
5 *metros* equivaldrán á.... 3,5889 × 5 = 17,9445 *piés*.
Un *centímetro* equivale á.. 0,035889 *piés*.

72 *centímetros* equivaldrán á $0{,}03589 \times 72 = \begin{cases} 0{,}07178 \\ 2{,}5123 \end{cases}$ *piés*.

Luego 5 *m*. 72 *cm*. equivalen á 20,52858 *piés*,
ó lo que es lo mismo 5 *m*. 72 *cm*. = 6 *var*. 2 *piés* 6 *pg*. 41 *p*.

261. Cuando en un problema de números concretos se den unidades de ámbos sistemas, se reducen primero á unidades de uno de ellos, y se resuelve el problema, el resultado se expresa en unidades del sistema que se pida.

Ejemplo. 3 *vr*., 2 *ps*., 7 *pulg*. han costado 86 *rs*. y 26 *c*., ¿cuánto costarán 5 *m*. y 6 *dm*.?

Para resolver este problema, principiaremos por reducir el número 3 *vr.*, 2 *ps.*, 7 *pulg.* á unidades métricas, y hallaremos (260, 1er EJ.) 3 *vr.*, 2 *ps.*, 7 *pulg.* = 3,227527 *m.*

El número 5 *m.* 6 *dm.* es igual á 5,6 *m.*; luego el problema queda reducido á determinar el valor de 5,6 *m.* sabiendo que 3,227527 *m.* han costado 86,27 *rs.*

Dividiendo 86,27 *rs.* por 3,227527, hallaremos el valor de un *metro*, y multiplicando este valor por 5,6 tendremos el resultado pedido, el cual es 149 *rs.* 70 *c.*

QUINTA PARTE.

POTENCIAS Y RAICES DE LOS NÚMEROS.

LECCION XXX.

Potencias en general de los números.

Potencias en general de los números.

262. Ya hemos dicho (44) que *potencia* de una cantidad es el resultado de repetir dicha cantidad como factor un cierto número de veces: denominándose *segunda* potencia ó *cuadrado* si se toma *dos* veces por factor, *tercera* ó *cubo* si *tres*, *cuarta* potencia si *cuatro*, y en general *enésima* potencia si se toma *n* veces por factor.

Inútil es advertir que al decir *potencia* de una *cantidad* se entiende que es del *número abstracto* que expresa la relacion de dicha cantidad á su unidad, pues como ya sabemos (46) careceria de todo sentido el resultado que se obtiene de elevar una cantidad cualquiera á una potencia.

La operacion que tiene por objeto hallar una potencia cualquiera de un número, toma el nombre de *elevacion* á *potencias*.

De esta definicion se deduce que todo número está elevado á su *primera potencia;* luego la *primera potencia de todo número es el mismo número.*

263. *Para elevar un número á la* SEGUNDA *potencia ó* CUADRADO, *se multiplica dicho número por sí mismo; para elevarle á la* TERCERA *potencia ó* CUBO, *se forma un producto de tres factores iguales al número dado; y en general para elevar un número á la* ENÉSIMA *potencia, se forma un producto de* n *factores iguales al número propuesto.*

Así: 5 elevado á la segunda potencia ó cuadrado será $5^2 = 5 \times 5 = 25$.

Del mismo modo se tendrá que 5 elevado á la tercera potencia ó cubo, será $5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 25 \times 5 = 125$.

Donde vemos que 25 es el *cuadrado* ó *segunda* potencia de 5, y 125 el *cubo* ó *tercera* potencia del mismo número 5.

Es necesario no confundir el *duplo* de un número con su *cuadrado* ó *segunda* potencia, ni el *cubo* ó *tercera* petencia de un número con su *triplo*, pues son cosas muy distintas.

264. *Toda potencia de un número entero es tambien un número entero.*

En efecto, el producto de varios números enteros es siempre un número entero.

265. *El producto de dos ó más potencias de un número es igual á una potencia del mismo número cuyo exponente es la suma de los exponentes de los factores.*

Sea el producto de las potencias, a^n, a^m y a^r del número a. Tendremos, segun la definicion

$$a^m = aaaa\ldots\ldots \text{ repetida } m \text{ veces,}$$
$$a^n = aaaa\ldots\ldots \text{ repetida } n \text{ veces,}$$
$$a^r = aaaa\ldots\ldots \text{ repetida } r \text{ veces;}$$

de donde se deduce

$$a^n \times a^m \times a^r = aaaa\ldots \times aaaa\ldots \times aaaa\ldots$$

ó lo que es lo mismo

$$a^n \times a^m \times a^r = a^{n+m+r},$$

que es lo que se queria demostrar.

Consecuencia. *Para elevar una potencia de un número á otra potencia, se multiplica el exponente de la primera por el de la segunda.*

En efecto, supongamos que se quiere elevar la potencia a^m á la *enésima* potencia: se tendrá

$$(a^m)^n = a^m \times a^m \times a^m \ldots \text{ repetido } n \text{ veces,}$$

ó lo que es lo mismo, segun el principio anterior,

$$(a^m)^n = a^{m+m+m+\ldots} = a^{m \times n},$$

que es lo que se queria demostrar.

266. *El cociente de dos potencias de un número es igual á una potencia del mismo número cuyo exponente es la diferencia de los exponentes de las potencias dadas, á la unidad, ó á una fraccion que tiene por numerador la unidad y por denominador una potencia del número cuyo exponente es la diferencia de exponentes del dividendo y divisor, segun que el exponente del dividendo sea mayor, igual ó menor que el exponente del divisor.*

Sea el cociente de las dos potencias a^n y a^m del número a.

Supongamos en primer lugar $n > m$. Tendremos:

$$\frac{a^n}{a^m} = \frac{aaaa\ldots}{aaaa\ldots}; \qquad [1]$$

y dividiendo ámbos términos de la segunda fraccion por a todas las veces que se pueda, lo que no altera su valor (153–3.°), se tendrá por resultado una fraccion que tiene por numerador una potencia de a cuyo exponente es la diferencia de los exponentes n y m, y por denominador la unidad; luego

$$\frac{a^n}{a^m} = \frac{a^{n-m}}{1} = a^{n-m},$$

que es lo primero que se queria demostrar.

Sea en segundo lugar $n = m$.

El cociente $\frac{a^n}{a^m}$ se reduce á la *unidad;* porque siundo $n = m$, el dividendo es igual al divisor; y por consiguiente será

$$\frac{a^n}{a^m} = \frac{a^m}{a^m} = 1,$$

que es lo segundo que se queria demostrar.

Sea por ultimo $n < m$.

Simplificando la segunda fraccion, de la igualdad [1] que nos expresa el valor del cociente de a^n por a^m, hallaremos por resultado otra fraccion que tendrá por numerador la unidad y por denominador una potencia de a cuyo exponente será la diferencia de los exponentes m y n; de modo que se tendrá, en el caso de ser $n < m$,

$$\frac{a^n}{a^m} = \frac{1}{a^{m-n}},$$

que es lo tercero que se queria demostrar.

267. *Para elevar un producto á una potencia se elevan sus factores á esta potencia*, ó lo que es lo mismo, *la potencia de un producto es igual al producto de las potencias de los factores.*

Sea $abcd$ el producto cuya *enésima* potencia queremos hallar. Segun la definicion de potencia, se tiene

$$(abcd)^n = abcd \times abcd \times abcd \ldots \text{ repetido } n \text{ veces},$$

ó lo que es lo mismo, puesto que el órden de factores no altera el producto,

$$(abcd)^n = aaa \ldots bbb \ldots ccc \ldots ddd \ldots = a^n b^n c^n d^n,$$

que es lo que se queria demostrar.

Observacion. Si alguno de los factores fuese una cierta potencia, se hallaria la de éste (252 *cons.*) multiplicando los exponentes.

Así, $$(ab^n c)^m = a^m b^{nm} c^m.$$

En efecto,

$$(ab^n c)^m = a^m \times (b^n)^m \times c^m = a^m b^{nm} c^m.$$

Consecuencia. *Si un número entero es una potencia exacta de otro, los exponentes de los factores primos en que se puede descomponer el primero son equimúltiplos de los exponentes de los factores primos del segundo.*

Porque dichos exponentes se obtienen, segun lo expuesto anteriormente, multiplicando los de los factores primos del número que se quiere elevar por el exponente de la potencia.

De aquí se deduce que si un número entero es divisible por un número primo cualquiera, no podrá ser una potencia exacta de un cierto grado, si no es divisible tambien por la potencia del mismo grado de dicho número primo.

De esta consecuencia, y de la fórmula que da (139) el número de factores simples y compuestos de un número N, se deduce que si el número de estos factores es par, N no podrá ser cuadrado perfecto.

268. *Para elevar un cociente á una potencia, se elevan el dividendo y divisor á dicha potencia*, ó lo que es lo mismo, *la potencia de un cociente es igual al cociente de las potencias del dividendo y divisor*.

Sea $\frac{a}{b} = Q$, de donde $a = bQ$.

Elevando á la *enésima* potencia se tendrá (267)

$$a^n = b^n Q^n;$$

y dividiendo por b^n $$\frac{a^n}{b^n} = Q^n;$$

luego $$Q^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n},$$

que es lo que se queria demostrar.

CONSECUENCIA. *Para elevar una fraccion á una potencia, se elevan sus dos términos á dicha potencia.*

Esta consecuencia puede demostrarse directamente fundándose en la definicion.

En efecto, la *enésima* potencia de la fraccion $\frac{a}{b}$, se hallará formando un producto de n factores iguales á dicha fraccion.

Así, $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \ldots = \frac{aaa\ldots}{aaa\ldots} = \frac{a^n}{b^n}$, que es lo que se queria demostrar.

269. *Toda potencia de una fraccion irreducible, es otra fraccion irreducible.*

Sea la fraccion irreducible $\frac{a}{b}$; elevándola á la *enésima* potencia, se tendrá

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Como los números a y b son primos entre sí (156), sus *enésimas* potencias tambien lo serán (131–2.ª); y por consiguiente la fraccion $\frac{a^n}{b^n}$ será irreducible, que es lo que se queria demostrar.

270. *Una fraccion irreducible no puede ser una potencia exacta de un cierto grado, si sus dos términos no son potencias del mismo grado.*

Sea una fraccion irreducible $\frac{A}{B}$ y $\frac{a^n}{b^n}$ la *enésima* potencia de otra fraccion $\frac{a}{b}$ tambien irreducible. Siendo los dos números a y b primos entre sí, sus potencias tambien lo serán, y por consiguiente la fraccion $\frac{a^n}{b^n}$ es irreducible.

Ahora bien, las fracciones $\frac{A}{B}$ y $\frac{a^n}{b^n}$, siendo irreducibles, no pueden ser iguales, si no son idénticas (157); luego es necesario que se tenga $A = a^n$ y $B = b^n$, que es lo que se queria demostrar.

271. *Las potencias de un número mayor que la unidad, van creciendo á medida que aumenta el exponente, y pueden ser mayores que cualquier cantidad por grande que sea, ó lo que es lo mismo tienen por límite infinito.*

Que las potencias de un número mayor que la unidad van aumentando á medida que aumenta el exponente, se deduce inmediatamente de la definicion de multiplicar: porque si el multiplicador es mayor que la unidad, el producto será mayor que el multiplicando; luego la segunda potencia de un número mayor que la unidad será mayor que este número, el cubo será mayor que el cuadrado, la cuarta potencia será mayor que la tercera, y así sucesivamente.

Lo que falta demostrar es que la *enésima* potencia de un número mayor que la unidad, puede ser, dando á n un valor suficientemente grande, mayor que una cantidad dada por grande que sea.

Representemos por N un número mayor que la unidad, y por E el exceso de N á dicha unidad.

Se tendrá $N = 1 + E$, ó lo que es lo mismo

$$N - 1 = E. \qquad [1]$$

Multiplicando el primer miembro de esta igualdad por N, número mayor que la unidad segun la hipótesis, se tendrá evidentemente

$$N^2 - N > E. \qquad [2]$$

Del mismo modo se verá que con más razon se verifica

$$N^3 - N^2 > E, \qquad [3]$$
$$N^4 - N^3 > E, \qquad [4]$$
$$\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots$$
$$N^n - N^{n-1} > E. \quad [n]$$

Sumando las relaciones [1], [2], [3]... [n], y haciendo la reduccion y destruccion, se tendrá evidentemente

$$N^n - 1 > En \text{ ó } N^n > En + 1.$$

Ahora bien, si representamos por C una cantidad tan grande como queramos, y hacemos

$$En + 1 > C, \text{ ó } En > C - 1,$$

para lo cual basta dar á n un valor mayor que $\frac{C-1}{E}$, tendremos que, siendo $N^n > En + 1$, y $En + 1 > C$, con más razon se tendrá

$$N^n > C;$$

luego podremos dar á n un valor tal que haga que la potencia *enésima* de un número N mayor que la unidad, sea mayor que una cantidad C por grande que ésta sea, que es lo que faltaba demostrar.

272. *Las potencias de un número menor que la unidad van decreciendo á medida que aumenta el exponente, y pueden ser menores que cualquier cantidad dada por pequeña que sea.*

De la definicion de multiplicar se deduce inmediatamente que la segunda potencia de un número menor que la unidad es menor que este número, que la tercera potencia es menor que la segunda, y así sucesivamente.

Ahora nos falta probar que la *enésima* potencia de un número menor que la unidad puede ser menor que cualquier cantidad dada por pequeña que ésta sea, dando á n un valor suficientemente grande.

Sea N un número menor que la unidad, que podrá representarse por una fraccion $\frac{1}{N'}$, siendo $N' > 1$, para lo cual no hay más que dividir la unidad por el número N y llamar N′ al cociente, en cuyo caso

$$NN' = 1 \quad ó \quad N = \frac{1}{N'}.$$

Esto supuesto, si elevamos cualquiera de estas igualdades á la potencia n, tendremos

$$N^n N'^n = 1, \quad ó \quad N^n = \frac{1}{N'^n}.$$

Ahora bien, si hacemos $\frac{1}{N'^n} < \frac{1}{C}$, para lo cual basta que $N'^n > C$, lo que es posible puesto que N′ es mayor que 1, se tendrá

$$N^n < \frac{1}{C};$$

luego podremos dar á n un valor tal que haga que la potencia *enésima* de un número N menor que la unidad sea menor que una cantidad dada $\frac{1}{C}$ por pequeña que sea, que es lo que faltaba demostrar.

LECCION XXXI.

Formacion del cuadrado de los números enteros. — Extraccion de la raiz cuadrada de los números enteros.

Formacion del cuadrado de los números enteros.

273. Ya hemos dicho que raiz de número es otro que elevado á una cierta potencia nos reproduce el primero; y que esta raiz se denomina *segunda* ó *cuadrada*, *tercera* ó *cúbica*, *cuarta* y en general *enésima*, segun que la potencia á que haya de elevarse dicha raiz para reproducir el número propuesto sea la *se-*

gunda, tercera, cuarta ó *enésima*. Tambien hemos visto ya los principios más importantes de las potencias en general de los números. Ahora nos ocuparemos en particular de la formacion del cuadrado de los números enteros, para deducir de ella la regla de la operacion inversa que tiene por objeto, dado un número, hallar su raiz; lo que se conoce con el nombre de extraccion de la raiz cuadrada de un número.

274. De la definicion de potencia se deduce que para elevar un número al cuadrado, basta multiplicarle por sí mismo; y por consiguiente los cuadrados de los diez primeros números son:

Números.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Cuadrados.	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

Como el cuadrado de otro número entero cualquiera se obtiene tambien multiplicando dicho número por sí mismo, la cifra de sus unidades será una de las en que terminan los cuadrados anteriores; por consiguiente todo número cuya cifra de las unidades sea 2, 3, 7 ú 8, no podrá ser cuadrado perfecto; pero no se vaya á creer que lo será el número que termina en alguna de las cifras 1, 4, 5, 6, 9 ó 0, que son en los que terminan los cuadrados de los nueve primeros números.

Del principio (254) se deduce que todo número divisible por un factor primo, no podrá ser un cuadrado perfecto si no es divisible tambien por el cuadrado de dicho número primo: y en general si un número es divisible por una potencia impar de un factor primo, no podrá ser cuadrado perfecto dicho número, si no es divisible tambien por la potencia par inmediata superior. Así, todo número par que no sea divisible por 4, no podrá ser un cuadrado perfecto, y todo número que termine en ceros, no podrá ser tampoco un cuadrado perfecto, como éstos no sean en número par; en efecto, si terminase en un número impar de ceros, los factores 2 y 5 ó uno por lo ménos vendria elevado á una potencia de grado impar, y por consiguiente el número no puede ser cuadrado perfecto (254 *cons.*).

275. ***El cuadrado de un número descompuesto en dos sumandos se forma de la suma de tres partes: cuadrado del primer sumando, duplo del primero por el segundo, y cuadrado del segundo.***

Sea N un número descompuesto en dos sumandos a y b; de modo que se tiene $N = a + b$; y por consiguiente

$$N^2 = (a + b)^2 = (a + b)\ (a + b) = a^2 + ab + ab + b^2,$$

ó lo que es lo mismo

$$N^2 = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

que es lo que se queria demostrar.

De aquí se deduce que *todo número que termine en* 5, *no puede ser cuadrado perfecto si la cifra de las decenas no es* 2.

En efecto, la raiz de todo número que termina en 5, debe terminar tambien en esta cifra; de modo que representando por D las decenas de un número cuya última cifra es 5, se tendrá que el cuadrado de dicho número es

$$(D \,.\, 10 + 5)^2 = D^2 \,.\, 100 + 2 \,.\, 5 \,.\, D \,.\, 10 + 25 =$$
$$(D \,.\, 10 + 5)^2 = D^2 \,.\, 100 + D \,.\, 100 + 25 = (D^2 + D)\,100 + 25:$$

lo que prueba que si un número termina en 5, su cuadrado terminará en 25.

276. *La diferencia de los cuadrados de dos números diferentes en una unidad, es el duplo del número menor más la unidad.*

En efecto, sean los números d y $d + 1$ cuyos cuadrados respectivos son d^2 y $(d + 1)^2$, y por consiguiente su diferencia será

$$(d + 1)^2 - d^2 = d^2 + 2d + 1 - d^2 = 2d + 1,$$

que es lo que se queria demostrar.

De aquí se deduce: 1.°, que los cuadrados de los números enteros consecutivos se van diferenciando cada vez más, á medida que dichos números aumentan; 2.°, que si al cuadrado de un número se le añade una cierta cantidad menor que el duplo de dicho número más la unidad, el resultado será menor que el cuadrado del número entero siguiente; y 3.°, que si se tiene el cuadrado de un número entero, se obtendrá el cuadrado del número siguiente aumentando al primero el duplo de dicho número más la unidad.

Extraccion de la raiz cuadrada de los números enteros.

277. La extraccion de la raiz cuadrada es el análisis de la elevacion al cuadrado, y tiene por objeto, dado un número, hallar otro que elevado á la segunda potencia nos reproduzca el primero. El número que se nos da, se considera como una potencia cuya raiz es el número que se busca.

La extraccion de la raiz cuadrada sabemos que se indica con el signo $\sqrt{\quad}$ llamado *radical*, bajo del cual se pone la cantidad cuya raiz queremos hallar.

Se dice que un número entero es un cuadrado perfecto, cuando hay otro número entero que elevado á la segunda potencia nos reproduce el primero.

278. *La raiz cuadrada de un número entero que no es un cuadrado perfecto, es un número inconmensurable.*

En efecto, dicha raiz no puede ser entera, porque el número no es cuadrado perfecto. Tampoco puede ser fraccionaria, porque ninguna fraccion elevada al cuadrado nos puede dar un número entero (256). No pudiendo ser esta raiz un número entero ni fraccionario, será inconmensurable, segun queriamos demostrar.

Raiz cuadrada entera de un número que no es un cuadrado perfecto, es el mayor número entero cuyo cuadrado se puede restar del número dado.

En la extraccion de la raiz cuadrada de un número entero distinguiremos dos casos: 1.°, que el número cuya raiz queremos hallar no pase de 100; y 2.°, que sea mayor que 100.

Para extraer la raiz cuadrada de un número menor que 100, conviene saber de memoria los cuadrados de los nueve primeros números (274); porque el número que se nos dé será ó uno de estos cuadrados, en cuyo caso su raiz es conocida, ó estará comprendido entre dos, y por lo tanto su raiz lo estará entre las de estos números; de modo que tomando por raiz la del cuadrado menor, se tendrá la raiz entera del número propuesto, que se diferenciará de la verdadera en ménos de una unidad. Así, la raiz de 64 es 8, y la de 50 es 7, puesto que 50 está comprendido entre 49 y 64, cuyas raices respectivas son 7 y 8; luego la raiz entera de 50 es 7.

279. La extraccion de la raiz cuadrada de un número mayor que 100 está fundada en los dos principios siguientes:

PRIMERO. *La raiz cuadrada entera de las centenas de un número es exactamente igual á las decenas de la raiz de dicho número.*

Sea N un número y N′ sus centenas; representemos por d las decenas de la raiz cuadrada de N, y por u todo lo que falta á la raiz, que podrá ser un número entero ó inconmensurable, pero menor que 10, segun que N sea ó no un cuadrado perfecto; de modo que se tendrá

$$N = (d\,.\,10 + u)^2 = d^2\,.\,100 + 2d\,.\,10\,.\,u + u^2;$$

siendo N′ el número de centenas de N, será

$$N' = \text{ó} < d^2 + \frac{2d\,.\,10\,.\,u + u^2}{100};$$

y como u es siempre menor que 10, se tendrá

$$\frac{2d\,.\,10\,.\,u + u^2}{100} < \frac{2d\,.\,100 + 100}{100} = 2d + 1;$$

y por consiguiente

$$N' < d^2 + 2d + 1 = (d+1)^2.$$

Pero evidentemente se tiene

$$N' = \text{ó} > d^2;$$

luego siendo $N' = \text{ó} > d^2$ y $< (d+1)^2$, su raiz cuadrada será d ó estará comprendida entre d y $d+1$, y por lo tanto la raiz entera de las centenas N′ del número N será igual á las decenas d de la raiz cuadrada de dicho número N, que es lo que se queria demostrar.

Este principio se suele demostrar tambien del modo siguiente: representando por d las decenas de la raiz del número N, se tendrá evidentemente

$$N = \text{ó} > d^2\,.\,100 \quad \text{y} \quad N < (d+1)^2\,.\,100;$$

por consiguiente el número N′ de centenas de N es por lo ménos igual á d^2 y menor que $(d+1)^2$; luego $\sqrt{N'}$ está comprendida entre d y $d+1$, y por tanto la parte entera de la raiz de N′, que son las centenas del número N, es igual á las decenas d de la raiz cuadrada de dicho número.

SEGUNDO. *Si de un número* N *se resta el cuadrado de las decenas de su raiz cuadrada y se divide el número de decenas del resto por el doble de la raiz hallada, el cociente que se obtenga será igual ó mayor que la cifra de las unidades de dicha raiz.*

En efecto, sea N un número, d las decenas de su raiz cuadrada, y u el número que falta para completar la raiz, cuyo número podrá ser entero ó inconmensurable, segun que N sea ó no un cuadrado perfecto: de modo que se tendrá

$$N=(d\,.\,10+u)^2=d^2\,.\,100+2d\,.\,10\,.\,u+u^2.$$

Restando de estas dos cantidades iguales el cuadrado de las decenas $d^2\,.\,100$, será

$$N-d^2\,.\,100=2d\,.\,10\,.\,u+u^2;$$

y representando por D las decenas de $N-d^2\,.\,100$, tendremos

$$D=\text{ó}>2du,$$

segun que u^2 contenga ó no decenas; luego

$$\frac{D}{2d}=\text{ó}>u,$$

que es lo que se queria demostrar.

Probados estos dos principios, pasemos á la extraccion de la raiz cuadrada, exacta ó aproximada en ménos de una unidad, de un número mayor que 100.

280. *Para extraer la raiz cuadrada exacta ó aproximada por defecto en ménos de una unidad de un número mayor que* 100, *se divide primero el número en secciones ó periodos de dos cifras empezando por la derecha, siendo indiferente que el último de la izquierda no tenga más que una; se halla la raiz cuadrada entera de dicho periodo de la izquierda, y obtendremos así la primera cifra de la raiz; se eleva dicha cifra al cuadrado, y éste se resta del primer periodo de la izquierda.*

Al lado de la resta se baja el siguiente período, y del número que resulta se separa con una coma la primera cifra de la derecha, se divide lo que queda á la izquierda por el duplo de la raiz hallada, y el cociente entero que se obtenga será igual ó mayor que la segunda cifra de la raiz. Para comprobar si la cifra hallada es la verdadera, se pone á la derecha del duplo de la raiz, y si el producto de el número que resulta por la cifra en cuestion, se puede restar del resto obtenido anteriormente seguido del segundo período, la cifra será buena; pero si no se puede restar, es señal de que es mayor, en cuyo caso se va disminuyendo de unidad en unidad, hasta que dicho producto se pueda restar.

Al lado de la nueva resta se baja el tercer período, y haciendo lo mismo que en el caso anterior, hallaremos la cifra siguiente, y así se continúa hasta encontrar la última cifra de la raiz, que será exacta, si el último resto es cero, é inexacta en el caso contrario.

Sea 11607649 el número cuya raiz cuadrada queremos hallar; dispondremos la operacion del modo siguiente:

$\sqrt{11,60,76,49}$	3407			
9	3	64	6807	
26,0	$\times 3$	$\times 4$	$\times 7$	
25 6	9	256	47649	
47,64,9	26 | 6		4764	680
47 64 9	2 | 4		4	7
0				

Siendo el número propuesto mayor que 100, su raiz cuadrada es mayor que 10; por consiguiente el número de decenas de la raiz será, segun el primer principio, la parte entera de la raiz del número 116076 que resulta de separar las dos primeras cifras de la derecha.

El número 116076 tambien es mayor que 100; el número de decenas de su raiz cuadrada es, segun el mismo principio, la parte entera de la raiz del número 1160 que resulta de separar al anterior sus dos últimas cifras de la derecha; y por último, el número de decenas de la raiz cuadrada de 1160 será la parte entera de la raiz de 11, que segun el primer caso es 3, cuyo cuadrado 9 restado de 11 nos da de residuo 2: *luego lo primero que hay que hacer para extraer la raiz cuadrada de un número, es dividirle en períodos de dos cifras principiando por la derecha, siendo indiferente que el último de la izquierda no tenga más que una; se halla la raiz entera de este período de la izquierda y obtendremos así la primera cifra de la raiz; se eleva dicha cifra al cuadrado y éste se resta del primer período.*

De este modo se obtiene un resto 2 que seguido del período siguiente 60 nos da el número 260, cuyas decenas 26 divididas por el duplo 6 de la raiz hallada, que es el número de decenas de $\sqrt{1160}$, nos da un cociente entero 4 que será, segun el segundo principio, igual ó mayor que la cifra de las unidades de dicha raiz. Será mayor si la suma de las dos partes que quedan del cuadrado, que son el duplo de las decenas 3 por las unidades 4, y el cuadrado de las unidades 4^2, no se puede restar del resto 260 que se obtuvo al quitar del número 1160 el cuadrado de las 3 decenas de la raiz, y será la cifra buena si dicha suma se puede restar; pero siendo esta suma

$$2 \times 30 \times 4 + 4^2 = 60 \times 4 + 4^2 = (60 + 4) \times 4 = 64 \times 4,$$

es decir, el producto de multiplicar el número que resulta poniendo á la derecha del duplo de las decenas la cifra de las unidades, por dicha cifra, se sigue que *bajando al lado del resto que se obtiene al restar del primer período de la izquierda, el cuadrado de la primera cifra de la raiz, separando la primer cifra de la derecha con una coma, y dividiendo lo que queda á la izquierda por el duplo de la raiz hallada, el cociente que se obtiene es igual ó mayor que la segunda cifra de la raiz: igual si el producto de multiplicar el número que resulta poniendo á la derecha del duplo de la raiz la cifra en cuestion por dicha cifra, se puede restar del resto obtenido anteriormente seguido del segundo período, y mayor en el caso de no poderse hacer dicha resta.*

En el caso presente el citado producto es 256, el cual se puede restar de 260, y esto nos prueba que la cifra 4 es la verdadera.

Colocando al lado del resto 4 el siguiente período 76 y separando la primera cifra de la derecha, obtenemos el número 47 menor que el duplo 68 de la raiz hallada 34, lo que prueba que no hay unidades del órden siguiente en la raiz; es decir, que la cifra inmediata es *cero*, y por tanto la parte entera de $\sqrt{116076}$ es 340, número que segun el primer principio es igual á las decenas de la raiz del número propuesto 11607649.

Colocando á la derecha del número 476 el siguiente período 49, separando la cifra 9 de la derecha y dividiendo el número 4764 que queda á la izquierda, por el duplo 680 de la raiz hallada, obtenemos el cociente entero 7, que colocado á la derecha del duplo de la raiz y efectuando el producto del número que resulta por el mismo cociente 7, hallamos el número 47649, que restado del resto anterior nos da la resta cero, lo cual nos prueba que el número propuesto 11607649 es un cuadrado perfecto, y que su raiz exacta es el número hallado 3407.

Con lo cual queda justificada en todas sus partes la regla dada para extraer la raiz cuadrada de un número entero.

Del mismo modo hallaremos que la raiz entera del número 3547234 es 1883 dando un resto 1545; es decir, que se tendrá

$$3547234 = 1883^2 + 1545.$$

Hé aquí los cálculos de la operacion indicada:

$\sqrt{3,54,72,34}$	1883		
1	28	368	3763
25,4	×8	×8	×3
22 4	224	2944	11289
3 07,2	25 | 2	307 | 36	1283 | 376
2 94 4	1 | 12	19 | 8	155 | 3
12 83,4			
11 28 9			
1 54 5			

Observaciones. 1.ª Dando el primer período de la izquierda de los que forman el número cuya raiz queremos hallar una cifra de esta raiz, y obteniendo otra por cada uno de los restantes, se sigue que el número de cifras de la raiz cuadrada de un número es igual á la mitad del número de cifras de dicho número ó la mitad más una, segun que tenga el número dado un número par ó impar de cifras.

2.ª Cada uno de los restos que se obtienen en el procedimiento que se sigue en la extraccion de la raiz cuadrada, es menor que el doble de la raiz hallada más la unidad; si no lo fuese seria señal que la cifra anteriormente hallada era menor que la verdadera, lo cual probaria un error en los cálculos.

3.ª Cuando algunas de las divisiones de las que se practican para hallar las diferentes cifras de que se compone la raiz, diese un cociente mayor que 9, como ha sucedido en el segundo ejemplo, se principian los ensayos por la cifra 9, pues si pudiera ser el número de unidades del órden siguiente mayor que 9, seria señal que la parte de la raiz hallada era menor que la verdadera, lo cual es imposible si se han hecho bien los cálculos.

4.ª Puede suceder, como en el primer ejemplo que hemos considerado, que alguno de los dividendos de las divisiones que se practican sea menor que el divisor, en cuyo caso la cifra que sigue en la raiz es cero, y el resto correspondiente á esta cifra es el anteriormente hallado seguido del período siguiente, de modo que se continuará la operacion bajando un nuevo período y siguiendo la regla general.

281. *Si el último resto hallado en la extraccion de la raiz cuadrada de un número, es igual ó menor que la raiz obtenida por el procedimiento indicado, dicha raiz se diferenciará por defecto de la verdadera en ménos de media unidad; y si es mayor, la citada raiz aumentada en una unidad expresará el valor de la verdadera aproximada por exceso en ménos de media unidad.*

Sea N un número, a su raiz cuadrada entera hallada segun la regla (280), y R el residuo final obtenido. Tendremos

$$N = a^2 + R;$$

si $R = \text{ó} < a$ $\qquad N = \text{ó} < a^2 + a,$

y por consiguiente

$$N < a^2 + a + \frac{1}{4} = \left(a + \frac{1}{2}\right)^2.$$

Pero por otra parte se tiene

$$N > a^2;$$

luego $$N > a^2 \text{ y } < \left(a + \frac{1}{2}\right)^2,$$

de donde $$\sqrt{N} > a \text{ y} < a + \frac{1}{2};$$

y por tanto la diferencia entre $\sqrt{N}$ y a es menor que $\frac{1}{2}$, que es lo primero que se queria demostrar.

Si $R > a$ valdrá por lo ménos $a + 1$, puesto que R es entero, y se tendrá
$$N = ó > a^2 + a + 1,$$
y por consiguiente
$$N > a^2 + a + \frac{1}{4} = \left(a + \frac{1}{2}\right)^2.$$

Pero por otra parte se tiene
$$N < (a + 1)^2;$$
luego N está comprendido entre $\left(a + \frac{1}{2}\right)^2$ y $(a + 1)^2$, de donde se deduce que
$$\sqrt{N} > a + \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad < a + 1,$$
y por consiguiente $a + 1$ se diferencia por exceso de $\sqrt{N}$ en ménos de $\frac{1}{2}$, que es lo segundo que se queria demostrar.

LECCION XXXII.

Extraccion de la raiz cuadrada de un número entero ó fraccionario en ménos de una cierta cantidad. — Extraccion de la raiz cuadrada de una decimal. — Extraccion de la raiz cuadrada de un quebrado.

Extraccion de la raiz cuadrada de un número entero ó fraccionario en ménos de una cierta cantidad.

282. *Para extraer la raiz cuadrada de un número entero ó fraccionario en ménos de una cierta cantidad* $\frac{1}{n}$, *se multipli-*

ca dicho número por el cuadrado del denominador n, *se extrae del producto la raiz aproximada en ménos de una unidad, y el resultado se parte por el número* n.

Sea N un número entero ó fraccionario del cual queremos extraer la raiz cuadrada aproximada en ménos de la cantidad $\frac{1}{n}$.

Representemos por $\frac{x}{n}$ y $\frac{x+1}{n}$ dos números que comprendan á la raiz cuadrada de N; es decir, que se tenga

$$\frac{x}{n} < \sqrt{N} \quad \text{y} \quad \frac{x+1}{n} > \sqrt{N}.$$

Elevando al cuadrado, se tendrá

$$\frac{x^2}{n^2} < N \quad \text{y} \quad \frac{(x+1)^2}{n^2} > N;$$

de donde

$$x^2 < Nn^2 \quad \text{y} \quad (x+1)^2 > Nn^2,$$

y extrayendo la raiz cuadrada en ménos de una unidad,

$$x < \sqrt{Nn^2} \quad \text{y} \quad x+1 > \sqrt{Nn^2}:$$

lo que prueba que x es la raiz entera del producto del número propuesto N por el cuadrado del denominador n; y como $\frac{x}{n}$ y $\frac{x+1}{n}$ son dos números que se diferencian en $\frac{1}{n}$ y que comprenden á la raiz de N, la diferencia que hay entre uno de ellos y dicha raiz es menor que $\frac{1}{n}$; luego $\frac{x}{n}$ expresa el valor de $\sqrt{N}$ con la aproximacion pedida, lo cual está conforme con el enunciado de la regla.

De otro modo. Siendo como ántes N el número cuya raiz cuadrada queremos hallar en ménos de $\frac{1}{n}$, tendremos evidentemente

$$N = \frac{Nn^2}{n^2}.$$

Extrayendo la raiz cuadrada aproximada en ménos de una unidad del numerador Nn^2 y representándola por r, se tendrá

$$r^2 < Nn^2 \quad \text{y} \quad (r+1)^2 > Nn^2;$$

de donde

$$\frac{r^2}{n^2} < N \quad \text{y} \quad \frac{(r+1)^2}{n^2} > N;$$

y como $\frac{r^2}{n^2}$ y $\frac{(r+1)^2}{n^2}$ son los cuadrados respectivos de $\frac{r}{n}$ y $\frac{r+1}{n}$, se tendrá

$$\frac{r}{n} < \sqrt{N} \quad \text{y} \quad \frac{r+1}{n} > \sqrt{N};$$

donde vemos que la raiz de N está comprendida entre las fracciones $\frac{r}{n}$ y $\frac{r+1}{n}$ diferentes en $\frac{1}{n}$; luego tomando el valor de una de ellas por el de dicha raiz, el error que se comete es menor que $\frac{1}{n}$.

Sea, por ejemplo, extraer la raiz cuadrada en ménos de $\frac{1}{25}$ del número 37.

El cuadrado del denominador 25 es 625; el producto de 37 por el cuadrado del denominador es 23125; la raiz cuadrada entera de dicho producto es 152: luego la raiz aproximada en ménos de $\frac{1}{25}$ del número 37 es $\frac{152}{25} = 6\frac{2}{25}$.

El cuadrado de la unidad seguida de un cierto número de ceros siendo igual á la unidad seguida de un número doble de ceros, y obteniéndose el producto de un número entero cualquiera por la unidad seguida de ceros, colocando dichos ceros á la derecha del número, se sigue que *para extraer la raiz cuadrada de un entero en ménos de una unidad de un cierto órden decimal, se escriben á la derecha del número tantas veces dos ceros como nos expresa el órden decimal de la aproximacion, se extrae la raiz cuadrada del número que resulta, y se separan en* *la raiz tantas cifras decimales como pares de ceros se escribieron.*

Así, la raiz cuadrada de 3 aproximada en ménos de una milésima, se obtendrá extrayendo la raiz cuadrada de 3 00 00 00 y separando en dicha raiz tres cifras decimales.

La raiz de 3 00 00 00 es 1732; luego la raiz de 3 aproximada en ménos de una milésima es 1,732.

Extraccion de la raiz cuadrada de una decimal.

283. *Para extraer la raiz cuadrada de una decimal, se hace que el número de cifras decimales sea par y doble del que ha de tener la raiz, para lo cual se escribirán ceros á la derecha si fuese necesario, se extrae la raiz cuadrada del número que resulta prescindiendo de la coma, y del resultado se separa un número de cifras decimales mitad del que tiene el número del cual se ha extraido la raiz.*

Sea el número 3,235 cuya raiz queremos hallar aproximada en ménos de una centésima.

Multiplicando el número por el cuadrado de 100, queda reducido á extraer la raiz cuadrada de 32350, la cual es 179, y por consiguiente separando de dicha raiz dos cifras decimales, tendremos la del número propuesto: luego la raiz de 3,235 aproximada en ménos de una centésima es 1,79.

Extraccion de la raiz cuadrada de un quebrado.

284. En la extraccion de la raiz cuadrada de los quebrados distinguiremos tres casos: 1.°, que los dos términos del quebrado cuya raiz se quiere extraer, sean cuadrados perfectos; 2.°, que sólo sea cuadrado el denominador; y 3.°, que ninguno de los dos términos sea cuadrado perfecto.

Primer caso. *Para extraer la raiz cuadrada de un quebrado cuyos dos términos son cuadrados perfectos, se extraen las raices cuadradas de dichos términos.*

Así, la raiz de $\frac{a^2}{b^2}$ es $\frac{a}{b}$; porque $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$.

Del mismo modo se hallará la raiz del quebrado siguiente:

$$\sqrt{\frac{121}{144}}=\frac{\sqrt{121}}{\sqrt{144}}=\frac{11}{12}.$$

SEGUNDO CASO. *Para extraer la raiz cuadrada de un quebrado cuyo denominador es un cuadrado perfecto, se extrae la raiz entera del numerador, y ésta se parte por la exacta del denominador.*

Sea $\frac{a}{b^2}$ la fraccion cuya raiz queremos hallar. Representando por r la raiz entera del numerador a, éste estará comprendido entre r^2 y $(r+1)^2$; por consiguiente el quebrado lo estará entre $\frac{r^2}{b^2}$ y $\frac{(r+1)^2}{b^2}$, y la raiz de dicho quebrado se hallará comprendida entre $\frac{r}{b}$ y $\frac{r+1}{b}$; de modo que $\frac{r}{b}$ nos expresa el valor de la raiz de $\frac{a}{b^2}$ aproximada en ménos de $\frac{1}{b}$.

Así, la raiz del quebrado $\frac{133}{144}$ es $\frac{11}{12}$ con un error menor que $\frac{1}{12}$.

Si se quisiese mayor grado de aproximacion, se hallaria como se ha dicho ya (282).

TERCER CASO. *Para extraer la raiz cuadrada de un quebrado cuyos términos no son cuadrados perfectos, se hace que lo sea el denominador multiplicando ámbos por dicho denominador, y se extrae la raiz cuadrada como en el caso anterior.*

Así, la raiz cuadrada del quebrado $\frac{a}{b}$ cuyos términos no son cuadrados perfectos, se reduce á la de la fraccion equivalente $\frac{ab}{b^2}$; de modo que representando por r la raiz del numerador ab, tendremos que la raiz del quebrado propuesto será la del segundo, es decir, $\frac{r}{b}$.

Observacion 1.ª Si el denominador b está compuesto de factores de los cuales unos son cuadrados perfectos y otros no, se podrá trasformar la fraccion propuesta en otra cuyo denominador sea un cuadrado perfecto, multiplicando ámbos términos por el producto de los factores que no sean cuadrados.

Idem 2.ª Si la raiz del numerador se extrae con un cierto grado de aproximacion $\frac{1}{n}$, la raiz del quebrado vendrá aproximada en ménos de $\frac{1}{bn}$. En efecto, siendo $\frac{r}{n}$ la raiz aproximada del numerador ab, dicho numerador estará comprendido entre $\left(\frac{r}{n}\right)^2$ y $\left(\frac{r+1}{n}\right)^2$; por consiguiente el quebrado lo estará entre $\frac{\left(\frac{r}{n}\right)^2}{b^2}$ y $\frac{\left(\frac{r+1}{n}\right)^2}{b^2}$; y su raiz se hallará comprendida entre $\frac{\frac{r}{n}}{b}$ y $\frac{\frac{r+1}{n}}{b}$, ó lo que es lo mismo, entre $\frac{r}{nb}$ y $\frac{r+1}{nb}$; luego $\frac{r}{nb}$ se diferencia de la raiz verdadera en ménos de $\frac{1}{nb}$, que es lo que se queria demostrar.

Si quisiéramos obtener la raiz de un quebrado con una cierta aproximacion decimal, se principiaria por convertirle en fraccion decimal, determinando un número de cifras decimales doble del que ha de tener la raiz, la cual se extrae como ya se ha dicho (269).

LECCION XXXIII.

Formacion del cubo de los números enteros. — Extraccion de la raiz cúbica de los números enteros.

Formacion del cubo de los números enteros.

285. De la definicion de potencia se deduce que para elevar un número al cubo, basta repetirle tres veces por factor, y por consiguiente los cubos de los diez primeros números son:

Números.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Cubos.	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

Como el cubo de otro número entero cualquiera se obtendria tambien repitiéndole tres veces por factor, la cifra de sus unidades será una de las en que terminan los cubos anteriores. Así, los cubos de los números que terminan en las cifras 1, 4, 5, 6, 9 ó 0, son terminados tambien en las mismas cifras; y si los números enteros terminan en una de las cifras 2, 3, 7 ú 8, sus cubos terminarán en 8, 7, 3 ó 2.

Del principio (267) se deduce que todo número divisible por un factor primo, no podrá ser un cubo perfecto si no es divisible tambien por el cubo de dicho número primo: y en general si un número es divisible por una potencia de un factor primo, no podrá ser cubo perfecto dicho número, si no es el exponente de la potencia citada un múltiplo de 3. Así, todo número par que no sea divisible por 8, no podrá ser un cubo perfecto; y todo número que termine en ceros, no podrá serlo tampoco como éstos no sean en un múltiplo de 3. En efecto, si no terminase en un número de ceros múltiplo de 3, los factores 2 y 5, ó uno de ellos por lo ménos, vendria elevado á una potencia cuyo exponente no seria múltiplo de 3, y por consiguiente el número no podria ser cubo perfecto segun se ha dicho ya (267 *cons.*).

286. ***El cubo de un número descompuesto en dos sumandos, se forma de la suma de cuatro partes: cubo del primer sumando, triplo del cuadrado del primero por el segundo, triplo del primero por el cuadrado del segundo, y cubo del segundo.***

Sea N un número descompuesto en dos sumandos a y b; de modo que se tiene $N = a + b$; y por consiguiente

$$N^3 = (a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b) = (a+b)^2(a+b) = (a^2 + 2\,ab + b^2)(a+b) = a^3 + 2\,a^2b + ab^2 + a^2b + 2\,ab^2 + b^3 = a^3 + 3\,a^2b + 3\,ab^2 + b^3,$$

ó lo que es lo mismo

$$N^3 = (a+b)^3 = a^3 + 3\,a^2b + 3\,ab^2 + b^3;$$

que es lo que se queria demostrar.

287. *La diferencia de los cubos de dos números diferentes en una unidad, es el triplo del cuadrado del número menor, más el triplo de dicho número menor, más la unidad.*

En efecto, sean los números d y $d+1$ cuyos cubos respectivos son d^3 y $(d+1)^3$, y por consiguiente su diferencia será

$$(d+1)^3 - d^3 = d^3 + 3d^2 + 3d + 1 - d^3 = 3d^2 + 3d + 1,$$

que es lo que se queria demostrar.

De aquí se deduce: 1.°, que los cubos de los números enteros consecutivos se van diferenciando cada vez más á medida que dichos números aumentan; 2.°, que si al cubo de un número se le añade una cierta cantidad menor que el triplo del cuadrado de dicho número, más el triplo del mismo número más la unidad, el resultado será menor que el cubo del número entero siguiente; y 3.°, que si se tiene el cubo de un número entero, se obtendrá el cubo del número siguiente, aumentando al primero el triplo del cuadrado de dicho número, más el triplo del mismo número, más la unidad.

Extraccion de la raiz cúbica de los números enteros.

288. La extraccion de la raiz cúbica es el análisis de la elevacion al cubo, y tiene por objeto, dado un número, hallar otro que elevado á la tercera potencia nos reproduzca el primero. El número que se nos da se considera como una potencia cuya raiz es el número que se busca.

La extraccion de la raiz cúbica se indica con el signo radical $\sqrt{}$ bajo del cual se pone la cantidad cuya raiz queremos hallar, y el índice que expresa que la raiz es cúbica, se escribe en la abertura del signo.

Se dice que un número entero es cubo perfecto, cuando hay otro número entero que elevado á la tercera potencia nos reproduce el primero.

289. *La raiz cúbica de un número entero que no es un cubo perfecto, es un número inconmensurable.*

La demostracion la misma que se dió en la raiz cuadrada (278).

Raiz cúbica entera de un número que no es cubo perfecto, es el mayor número entero cuyo cubo se puede restar del número dado.

En la extraccion de la raiz cúbica de un número, distinguiremos dos casos: 1.°, que el número cuya raiz cúbica queremos hallar no pase de 1000; y 2.°, que sea mayor que 1000.

Para extraer la raiz cúbica de un número menor que 1000, conviene saber de memoria los cubos de los nueve primeros números (285): porque el número que se nos dé, ó será uno de estos cubos, en cuyo caso su raiz es conocida; ó estará comprendido entre dos, y por lo tanto su raiz lo estará entre las de estos números; de modo que tomando por raiz la del cubo menor, se tendrá la raiz entera del número propuesto, que se diferenciará de la verdadera en ménos de una unidad. Así, la raiz cúbica de 512 es 8, y la de 458 es 7, puesto que 458 está comprendido entre 343 y 512, cuyas raices respectivas son 7 y 8; luego la raiz entera de 458 es 7.

290. La extraccion de la raiz cúbica de un número mayor que 1000, está fundada en los dos principios siguientes:

Primero. *La raiz cúbica entera de los millares de un número, es exactamente igual á las decenas de la raiz de dicho número.*

Sea N un número y N' sus millares; representemos por d las decenas de la raiz cúbica de N, y por u todo lo que le falta á la raiz, que podrá ser un número entero ó inconmensurable, pero siempre menor que 10; de modo que se tendrá

$$N=(d.10+u)^3=d^3.1000+3d^2.100.u+3d.10.u^2+u^3:$$

siendo N' el número de millares de N, será

$$N' = \text{ó} < d^3+\frac{3d^2.100.u+3d.10.u^2+u^3}{1000};$$

y como u es siempre menor que 10, se tendrá

$$\frac{3d^2.100.u+3d.10.u^2+u^3}{1000}<\frac{3d^2.1000+3d.1000+1000}{1000}=$$

$$3d^2+3d+1,$$

y por consiguiente

$$N'<d^3+3d^2+3d+1=(d+1)^3.$$

Pero evidentemente se tiene

$$N' = ó > d^3;$$

luego siendo $N' = ó > d^3$ y $< (d+1)^3$, su raiz cúbica será d ó estará comprendida entre d y $d+1$, y por tanto la raiz entera de los millares N' del número N, será igual á las decenas de la raiz cúbica de dicho número N, que es lo que se queria demostrar.

Tambien se demuestra este principio del modo siguiente: representando por d las decenas de la raiz del número N, se tendrá evidentemente

$$N = ó > d^3 . 1000 \text{ y } N < (d+1)^3 . 1000;$$

por consiguiente, el número N' de millares de N es por lo ménos d^3 y menor que $(d+1)^3$; luego la raiz cúbica de N' es por lo ménos d y no llega á valer $d+1$, y por tanto la parte entera de dicha raiz es el número d de decenas de la raiz cúbica del número N, que es lo que se queria demostrar.

Segundo. *Si de un número se resta el cubo de las decenas de su raiz cúbica y se divide el número de centenas del resto por el triplo del cuadrado de las decenas de la raiz, el cociente que se obtenga es igual ó mayor que la cifra de las unidades de dicha raiz.*

En efecto, sea N un número, d las decenas de su raiz cúbica, y u el número que falta para completar la raiz, el cual podrá ser entero ó inconmensurable, segun que N sea ó no un cubo perfecto: de modo que se tendrá

$$N = (d.10+u)^3 = d^3.1000 + 3d^2.100.u + 3d.10.u^2 + u^3.$$

Restando de estas dos cantidades iguales el cubo de las decenas $d^3 . 1000$, será

$$N - d^3 . 1000 = 3d^2 . 100 . u + 3d . 10 . u^2 + u^3,$$

y representando por C las centenas de $N - d^3. 1000$, se tendrá

$$C = ó > 3d^2u,$$

segun que las dos partes restantes $3d.10.u^2 + u^3$ contengan ó no centenas; luego

$$\frac{C}{3d^2} = \text{ó} > u,$$

que es lo que se queria demostrar.

Probados estos dos principios, pasemos á la extraccion de la raiz cúbica exacta ó aproximada en ménos de una unidad de un número mayor que 1000.

291. *Para extraer la raiz cúbica exacta ó aproximada en ménos de una unidad de un número mayor que* 1000, *se divide primero el número en secciones ó períodos de tres cifras principiando por la derecha, siendo indiferente que el último de la izquierda tenga solamente una ó dos; se extrae la raiz cúbica del primer período de la izquierda, y obtendremos así la primera cifra de la raiz; se eleva al cubo dicha cifra, y éste se resta del primer período de la izquierda.*

Al lado de la resta se baja el siguiente período, y del número que resulta se separan con una coma las dos cifras de la derecha, se divide lo que queda á la izquierda por el triplo del cuadrado de la raiz hallada, y el cociente entero que se obtenga será igual ó mayor que la segunda cifra de la raiz. Para comprobar si la cifra hallada es la verdadera, se suman el triplo del cuadrado de las decenas por la cifra hallada, el triplo de las decenas por el cuadrado de dicha cifra, y el cubo de la misma, y si esta suma se puede restar del resto obtenido anteriormente seguido del segundo período, la cifra será buena; pero si no se puede restar, es señal de que es mayor, y entónces se le disminuye de unidad en unidad, hasta que dicha suma se pueda restar.

Al lado de la nueva resta se baja el tercer período, y haciendo lo mismo que en el caso anterior, hallaremos la cifra siguiente; y así se continúa hasta encontrar la última cifra de la raiz, que será exacta si el último resto es cero, é inexacta en el caso contrario.

Sea 41421736 el número cuya raiz cúbica queremos hallar; dispondremos la operacion del modo siguiente:

$\sqrt[3]{41,421,736}$	346			
27	3	3	34	34
14 4,21	3	3	34	3
10 8	9	9	136	102
1 44	3	16	102	36
64	27	144	1156	612
2 117 7,36	4		3	306
2 080 0	108		3468	3672
36 7 2			6	
2 16			20808	
0 000 0 00	144	27	21077	3468
	9	5	269	6

Siendo el número propuesto mayor que 1000, su raiz cúbica es mayor que 10; por consiguiente el número de decenas de la raiz será, segun el primer principio, la parte entera de la raiz del número 41421 que resulta de separar las tres primeras cifras de la derecha.

El número 41421 tambien es mayor que 1000; el número de decenas de su raiz cúbica es, segun el mismo principio, la parte entera de la raiz de 41, la cual es, segun el primer caso, 3, cuyo cubo 27 restado de 41 nos da de residuo 14: luego *lo primero que hay que hacer para extraer la raiz cúbica de un número, es dividirle en secciones ó períodos de tres cifras principiando por la derecha, siendo indiferente que el último no contenga más que una ó dos; se halla la raiz entera de este período de la izquierda, y obtendremos así la primera cifra de la raiz; se eleva dicha cifra al cuadrado, y éste se resta del primer período.*

De este modo se obtiene un resto 14 que seguido del período siguiente 421 nos da el número 14421, cuyas centenas 144 divididas por 27, triplo del cuadrado de la raiz hallada, que es el número de decenas de la raiz cúbica de 41421, nos da un cociente entero 5 que será, segun el segundo principio, igual ó mayor que la cifra de las unidades de la raiz cúbica de 41421; será mayor (*) si la suma de las tres partes que quedan del

(*) Tambien se puede comprobar la cifra de las unidades de la raiz de un número, elevando al cubo toda la raiz hallada; y si este cubo se cubo, á saber: el triplo del cuadrado de las decenas 3 por las unidades 5, más el triplo de las decenas por el cuadrado de las unidades, más el cubo de las unidades, no se puede restar del resto anteriormente obtenido seguido de un período; y será la cifra buena si dicha suma se puede restar; luego *bajando á la derecha del resto que se obtiene al restar del primer período de la izquierda, el cubo de la primera cifra de la raiz, separando las dos primeras cifras de la derecha con una coma y dividiendo lo que queda á la izquierda por el triplo del cuadrado de la raiz, el cociente que se obtiene es igual ó mayor que la segunda cifra de la raiz; igual si la suma del triplo del cuadrado de la raiz hallada por la cifra en cuestion, más el triplo de la raiz por el cuadrado de dicha cifra, más el cubo de la misma, se puede restar del resto obtenido anteriormente seguido de un período, y mayor si dicha resta no puede efectuarse.*

En el caso presente esta suma no puede restarse, por lo que se rebaja una unidad al 5, y comprobado el 4 hallamos las tres partes 108 centenas, 144 decenas y 64 unidades, cuya suma restada del resto anterior seguido del segundo período, es decir, de 14421, obtenemos el nuevo resto 2117; lo cual prueba que la cifra 4 es buena.

Colocando al lado del resto 2117 el siguiente período 736, separando los dos cifras de la derecha y dividiendo por el triplo del cuadrado 3468 de la raiz hallada, obtenemos el cociente entero 6, el cual comprobado nos da la suma de las tres partes 20808 centenas, 3672 decenas y 216 unidades, cuya suma restada del resto anterior seguido del último período, es decir, de 2117736, nos da el resto cero, lo cual nos prueba que el número propuesto 41421736 es un cubo perfecto, y que su raiz exacta es 346.

Con lo cual queda justificada, en todas sus partes, la regla dada para extraer la raiz cúbica de un número entero.

---

puede restar del número propuesto, la cifra será buena, y no lo será en el caso de no poderse restar, en cuyo caso se rebaja la raiz de unidad en unidad hasta que dicha resta pueda efectuarse.

Del mismo modo se verá que la raiz cúbica entera del número 84570327 es 438, dando un resto 542655, es decir, que

$$84570327 = 438^3 + 542655.$$

Hé aquí los cálculos de la operacion indicada.

$\sqrt[3]{84,570,327}$	438			
64	4	4	43	43
20 5,70	4	3	43	3
14 4	16	12	129	129
1 0 8	3	9	172	64
27	48	108	1849	516
5 0 633,27	3		3	774
4 4 376	144		5547	8256
825 6			8	
5 12			44376	
5 426 55	205	48	50633	5547
	13	4	710	9

Observaciones. 1.ª Dando el primer período de la izquierda de los que forman el número cuya raiz queremos hallar una cifra de esta raiz, y obteniendo otra por cada uno de los restantes, se sigue que el número de cifras de la raiz cúbica de un número es igual al número de períodos de tres cifras en que se descompone, pudiendo tener el último una ó dos solamente.

2.ª Cada uno de los restos que se obtienen en el procedimiento de la raiz cúbica es menor que el triplo del cuadrado de la raiz hallada, más el triplo de dicha raiz, más la unidad; si no lo fuese seria señal que la cifra hallada anteriormente era menor que la verdadera, lo cual probaria un error en los cálculos.

3.ª Cuando alguna de las divisiones de las que se practican para hallar las diferentes cifras de que se compone la raiz, diese un cociente entero mayor que 9, se principiarán los ensayos por la cifra 9; porque si pudiera ser el número de unidades del órden siguiente mayor que 9, seria señal que la parte de la raiz hallada era menor que la verdadera, lo cual es imposible si se han hecho bien los cálculos.

4.ª Puede suceder que alguno de los dividendos de las divisiones que se practican, sea menor que el divisor correspondiente, en cuyo caso la cifra que sigue en la raiz es cero, y el resto correspondiente á esta cifra es el anteriormente hallado seguido del período siguiente, de modo que se continuará la operacion bajando un nuevo período y siguiendo la regla general.

LECCION XXXIV.

Extraccion de la raiz cúbica de un número entero ó fraccionario en ménos de una cierta cantidad. — Extraccion de la raiz cúbica de una decimal. — Extraccion de la raiz cúbica de un quebrado.

Extraccion de la raiz cúbica de un número entero ó fraccionario en ménos de una cierta cantidad.

292. *Para extraer la raiz cúbica de un número entero ó fraccionario en ménos de una cierta cantidad* $\frac{1}{n}$, *se multiplica dicho número por el cubo del denominador* n, *se extrae del producto la raiz cúbica entera, y el resultado se parte por el número* n.

Sea N un número entero ó fraccionario del cual queremos extraer la raiz cúbica aproximada en ménos de la cantidad $\frac{1}{n}$.

Representemos por $\frac{x}{n}$ y $\frac{x+1}{n}$ dos números que comprendan á la raiz cúbica de N, es decir, que se tenga

$$\frac{x}{n} < \sqrt[3]{N} \quad y \quad \frac{x+1}{n} > \sqrt[3]{N};$$

elevando al cubo, será

$$\frac{x^3}{n^3} < N \quad y \quad \frac{(x+1)^3}{n^3} > N;$$

de donde

$$x^3 < Nn^3 \quad y \quad (x+1)^3 > Nn^3;$$

y extrayendo la raiz cúbica en ménos de una unidad,

$$x < \sqrt[3]{Nn^3} \quad y \quad x+1 > \sqrt[3]{Nn^3};$$

lo que prueba que x es la raiz cúbica entera del producto del número propuesto N por el cubo del denominador n; y como $\frac{x}{n}$ y $\frac{x+1}{n}$ son dos números que se diferencian en $\frac{1}{n}$ y comprenden á la raiz cúbica de N, la diferencia que hay entre uno de ellos y dicha raiz es menor que $\frac{1}{n}$; luego $\frac{x}{n}$ expresa el valor de la raiz cúbica de N con la aproximacion pedida, lo cual está conforme con el enunciado de la regla.

De otro modo. Siendo como ántes N el número cuya raiz cúbica queremos hallar en ménos de $\frac{1}{n}$, tendremos evidentemente

$$N = \frac{Nn^3}{n^3};$$

extrayendo la raiz cúbica aproximada en ménos de una unidad del numerador Nn^3 y representándola por r, se tendrá

$$r^3 < Nn^3 \quad y \quad (r+1)^3 > Nn^3;$$

de donde

$$\frac{r^3}{n^3} < N \quad y \quad \frac{(r+1)^3}{n^3} > N;$$

y como $\frac{r^3}{n^3}$ y $\frac{(r+1)^3}{n^3}$ son los cubos respectivos de $\frac{r}{n}$ y $\frac{r+1}{n}$, se tendrá

$$\frac{r}{n} < \sqrt[3]{N} \quad y \quad \frac{r+1}{n} > \sqrt[3]{N};$$

donde vemos que la raiz cúbica del número N está comprendida entre las fracciones $\frac{r}{n}$ y $\frac{r+1}{n}$ diferentes en $\frac{1}{n}$; luego tomando el valor de una de ellas por el de dicha raiz, el error que se comete es menor que $\frac{1}{n}$.

Sea, por ejemplo, extraer la raiz cúbica en ménos de $\frac{1}{25}$ del número 2.

El cubo del denominador 25 es 15625, el producto de 2 por el cubo del denominador es 31250; la raiz cúbica entera de dicho producto es 31; luego la raiz cúbica aproximada en ménos de $\frac{1}{25}$ del número 2, es $\frac{31}{25} = 1\frac{6}{25}$.

Siendo el cubo de la unidad seguida de un cierto número de ceros igual á la unidad seguida de un número triplo de ceros, y obteniéndose el producto de un número entero cualquiera por la unidad seguida de ceros, colocando dichos ceros á la derecha del número, se sigue que, *para extraer la raiz cúbica de un entero en ménos de una unidad de un cierto órden decimal, se escriben á la derecha del número tantas veces tres ceros como nos expresa el órden decimal de la aproximacion, se extrae la raiz cúbica del número que resulta y se separan en la raiz tantas cifras decimales como grupos de tres ceros se escribieron.*

Así, la raiz cúbica de 3 aproximada en ménos de una centésima, se obtendrá extrayendo la raiz cúbica entera de 3 000 000 y separando en dicha raiz dos cifras decimales.

La raiz cúbica entera de 3 000 000 es 154; luego la raiz de 3 aproximada en ménos de una centésima es 1,54.

Extraccion de la raiz cúbica de una decimal.

293. *Para extraer la raiz cúbica de una decimal, se hace que el número de cifras decimales sea múltiplo de 3 y triplo del que ha de tener la raiz, para lo cual se escribirán ceros á la derecha si fuese necesario, se extrae la raiz cúbica entera del número que se obtiene prescindiendo de la coma, y del resultado se separa un número de cifras decimales igual al tercio del que tiene el número del cual se ha extraido la raiz.*

Sea el número 3,2 cuya raiz queremos hallar aproximada en ménos de una centésima.

Multiplicando el número por el cubo de 100, queda reducido á extraer la raiz cúbica entera de 3 200 000, la cual es 147; y por consiguiente separando de dicha raiz dos cifras decimales, tendremos la del número propuesto: luego la raiz cúbica de 3,2 aproximada en ménos de una centésima es 1,47.

Extraccion de la raiz cúbica de un quebrado.

294. En la extraccion de la raiz cúbica de los quebrados distinguiremos tres casos: 1.°, que los dos términos del quebrado cuya raiz se quiere extraer, sean cubos perfectos; 2.°, que sólo sea cubo perfecto el denominador; y 3.°, que ninguno de los dos términos lo sean.

Primer caso. *Para extraer la raiz cúbica de un quebrado cuyos dos términos son cubos perfectos, se extraen las raices cúbicas de dichos términos.*

Así, la raiz cúbica de $\frac{a^3}{b^3}$ es $\frac{a}{b}$; porque $\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a^3}{b^3}$.

Del mismo modo se verá que

$$\sqrt[3]{\frac{1331}{1728}} = \frac{\sqrt[3]{1331}}{\sqrt[3]{1728}} = \frac{11}{12}.$$

Segundo caso. *Para extraer la raiz cúbica de un quebrado cuyo denominador es un cubo perfecto, se extrae la raiz entera del numerador, y ésta se parte por la exacta del denominador.*

Sea $\frac{a}{b^3}$ la fraccion cuya raiz queremos hallar. Representando por r la raiz entera del numerador a, éste estará comprendido entre r^3 y $(r+1)^3$; por consiguiente el quebrado lo estará entre $\frac{r^3}{b^3}$ y $\frac{(r+1)^3}{b^3}$, y la raiz de dicho quebrado se hallará comprendida entre $\frac{r}{b}$ y $\frac{r+1}{b}$; de modo que $\frac{r}{b}$ nos expresa el valor de la raiz de $\frac{a}{b^3}$ aproximada en ménos de $\frac{1}{b}$.

Así, la raiz cúbica del quebrado $\frac{1341}{1728}$ es $\frac{11}{12}$ con un error menor que $\frac{1}{12}$.

Si se quisiera mayor grado de aproximacion, se hallaria como se ha dicho ya anteriormente (292).

Tercer caso. *Para extraer la raiz cúbica de un quebrado* *cuyos términos no son cubos perfectos, se hace que lo sea el denominador multiplicando ámbos por el cuadrado de dicho denominador, y se extrae la raiz cúbica como en el caso anterior.*

Así, la raiz cúbica del quebrado $\frac{a}{b}$ cuyos términos no son cubos perfectos, se reduce á la de la fraccion equivalente $\frac{ab^2}{b^3}$; de modo que representando por r la raiz del numerador ab^2, tendremos que la raiz del quebrado propuesto será la del segundo, es decir, $\frac{r}{b}$.

Observacion. Si el denominador b está compuesto de factores de los cuales unos son cubos perfectos y otros no, se podrá trasformar la fraccion propuesta en otra cuyo denominador sea un cubo perfecto, multiplicando ámbos términos por la primera potencia de los factores que en b se hallen elevados al cuadrado, y por el cuadrado de aquellos que lo estén á la primera.

Sea, por ejemplo, la fraccion $\frac{37}{504}$ cuya raiz cúbica queremos hallar. Segun la regla general, se reducirá la operacion á extraer la raiz cúbica de la fraccion $\frac{9398592}{(504)^3}$; pero segun esta observacion, será más sencillo multiplicar los dos términos de la fraccion propuesta, por los factores 3 y 7^2, quedando la cuestion reducida á extraer la raiz cúbica de $\frac{5437}{(42)^3}$.

Si la raiz del numerador se extrae con un cierto grado de aproximacion $\frac{1}{n}$, la raiz del quebrado vendrá aproximada en ménos de $\frac{1}{bn}$. En efecto, siendo $\frac{r}{n}$ la raiz aproximada del numerador ab^2, dicho numerador estará comprendido entre $\left(\frac{r}{n}\right)^3$ y $\left(\frac{r+1}{n}\right)^3$; por consiguiente el quebrado lo estará entre $\frac{\left(\frac{r}{n}\right)^3}{b^3}$ y $\frac{\left(\frac{r+1}{n}\right)^3}{b^3}$; y su raiz se hallará comprendida entre

$\dfrac{\frac{r}{n}}{b}$ y $\dfrac{\frac{r+1}{n}}{b}$; ó lo que es lo mismo, entre $\dfrac{r}{nb}$ y $\dfrac{r+1}{nb}$; luego $\dfrac{r}{nb}$ se diferencia de la raiz verdadera en ménos de $\dfrac{1}{nb}$, que es lo que se queria demostrar.

Si quisiéramos obtener la raiz de un quebrado con una cierta aproximacion decimal, se principiará por convertirla en fraccion decimal y determinar un número de cifras decimales triplo del que ha de tener la raiz, la cual se extrae como ya se ha dicho (293).

LECCION XXXV.

De las raices en general. — Cálculo de radicales numéricos.

De las raices en general.

295. Ya hemos visto que una raiz de un número se denomina segunda ó cuadrada, tercera ó cúbica, cuarta, y en general *enésima*, segun que haya de elevarse al cuadrado, cubo, cuarta y en general *enésima* potencia para que reproduzca dicho número.

Para indicar la raiz *enésima* de un número se usa el signo radical $\sqrt[n]{\ }$ en cuya abertura se coloca el número n que se llama índice ó grado de la raiz.

Cuando el índice es 2 se suprime, y al decir ó expresar solamente la raiz de un número se sobreentiende es la cuadrada.

Si un número entero no tiene raiz enésima exacta en números enteros, tampoco la tiene fraccionaria: dicha raiz es inconmensurable. Lo mismo sucede si el número es fraccionario, que si no tiene raiz enésima exacta fraccionaria tiene que ser inconmensurable. Se demuestra del mismo modo que para la raiz cuadrada (278).

296. *La raiz enésima de un producto es igual al producto de las raices enésimas de los factores.*

Sea la raiz enésima del producto abc, y vamos á demostrar que

$$\sqrt[n]{abc} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} \times \sqrt[n]{c} \qquad [1].$$

En efecto, segun el principio (267), se tiene

$$\left(\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}\times\sqrt[n]{c}\right)^n=abc;$$

luego $\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}\times\sqrt[n]{c}$ es la raiz enésima del producto *abc*, que es lo que se queria demostrar.

297. *La raiz enésima de un cociente es igual al cociente de las raices enésimas del dividendo y divisor.*

Sea $\frac{a}{b}=Q$, de donde $a=bQ$.

Segun el principio anterior, se tiene

$$\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{b}\times\sqrt[n]{Q},$$

y dividiendo por $\sqrt[n]{b}$ será

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{Q},$$

que es lo que se queria demostrar.

Consecuencia. *La raiz enésima de una fraccion, es igual al cociente de las raices enésimas de sus dos términos.*

298. *La emésima potencia de la raiz enésima de un número es la raiz enésima de la misma potencia de dicho número.*

Sea $\sqrt[n]{a}$ la raiz enésima de a cuya *emésima* potencia queremos hallar. Se tendrá

$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{a}\ldots$ repetido m veces, ó lo que es lo mismo

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{aaa\ldots}=\sqrt[n]{a^m},$$

que es lo que se queria demostrar.

299. *La raiz emésima de la raiz enésima de un número, es igual á la raiz cuyo índice es el producto de los índices.*

Es decir, que $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$ [1].

En efecto, elevando el primer miembro de la igualdad [1] á la potencia m y luego á la potencia n, lo que equivale á elevarle á la potencia mn (252 *cons.*), se tendrá

$$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{mn}=\left[\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{m}\right]^{n}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^{n}=a,$$

lo cual prueba que $\sqrt[n]{\sqrt[n]{a}}$ es la raiz mn de a, segun queriamos demostrar.

CONSECUENCIA. *La raiz de un número cuyo índice es el producto de varios factores, es igual á las raices sucesivas cuyos índices sean cada uno de diferentes factores.*

En efecto, segun el principio anterior, se tiene

$$\sqrt[mnp]{a}=\sqrt[np]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[p]{\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}}.$$

300. De esta consecuencia y por medio de las reglas dadas para extraer la raiz cuadrada y cúbica de un número, se deduce el modo de extraer la raiz cuyo índice no contenga más factores primos que 2 y 3.

En efecto, segun la consecuencia anterior, el problema queda reducido á extraer raices cuadradas y cúbicas.

Así, la raiz *cuarta* de un número, se halla extrayendo la raiz cuadrada de dicho número y despues la raiz cuadrada del resultado; la última hallada es la raiz cuarta del número propuesto.

La raiz *octava* de un número se halla extrayendo la raiz cuadrada de dicho número y despues la raiz cuarta del resultado, lo que equivale á extraer tres raices cuadradas sucesivas del número.

Y del mismo modo se obtendrá por una serie de raices cuadradas la raiz cuyo índice sea una cierta potencia de 2, de un número cualquiera.

Si se fijase el grado de aproximacion que habia de tener la raiz *cuarta*, *ochava*, etc., se veria fácilmente con qué grado de aproximacion se habian de obtener cada una de las raices sucesivas que hay que extraer.

Así, si queremos obtener en ménos de una *centésima* la raiz *cuarta* de un número N, hallaremos la raiz cuadrada de N con cuatro cifras decimales, es decir, en ménos de una *diez milésima*, y de ese modo tendremos la raiz de la raiz cuadrada de N, ó sea la raiz cuarta de dicho número con dos cifras decimales, ó lo que es lo mismo aproximada en ménos de una *centésima*.

Del mismo modo se verá que las raices cuyos índices son una potencia cualquiera de 3, se obtienen por una serie de raices cúbicas. Así, la raiz *novena* de un número, se hallará extrayendo la raiz cúbica de dicho número y despues la raiz cúbica del resultado.

Fácilmente se veria tambien el grado de aproximacion con que se deben obtener estas raices sucesivas, para que la final tenga una aproximacion dada.

301. La raiz cuyo índice no tiene más factores primos que 2 y 3, se obtiene hallando una serie de raices cuadradas y otra de raices cúbicas.

Así, la raiz *sexta* de un número se obtiene hallando primero la raiz cuadrada de dicho número y despues la raiz cúbica del resultado.

La raiz cuyo índice es 12, se obtiene hallando la raiz cuarta, la cual se halla por dos raices sucesivas cuadradas, y despues determinando la raiz cúbica del resultado.

Cálculo de los radicales numéricos.

302. Se da el nombre de *radical* á la raiz indicada de un grado cualquiera de un número, llamándose radicales de *segundo, tercero, cuarto,* y en general *enésimo* grado, segun que la raiz que indica sea la segunda, tercera, cuarta y en general enésima.

De la definicion de radical se deduce que todos los principios demostrados anteriormente en las raices en general de los números son aplicables á los radicales.

303. Simplificacion de radicales. *Si la cantidad subradical* (*) *se puede descomponer en dos factores de los cuales el*

(*) Llámase así á la cantidad que hay debajo del signo radical.

uno sea una potencia del mismo grado que expresa el índice, se podrá simplificar dicho radical sacando fuera como factor la raiz del que es potencia exacta.

En efecto, sea el radical $\sqrt[n]{A}$, y supongamos que A se puede descomponer en el producto de los factores a^n y A', es decir, que $A = a^n A'$, se tendrá (296)

$$\sqrt[n]{A} = \sqrt[n]{a^n A'} = \sqrt[n]{a^n} \times \sqrt[n]{A'} = a\sqrt[n]{A'}, \qquad [1]$$

que es lo que se queria demostrar.

Recíprocamente, *todo factor de un radical puede ponerse bajo del mismo, multiplicando la cantidad subradical por una potencia de dicho factor cuyo exponente sea el índice.*

En efecto, la igualdad [1] nos da

$$a\sqrt[n]{A'} = \sqrt[n]{a^n} \times \sqrt[n]{A'} = \sqrt[n]{a^n A'},$$

que es lo que se queria demostrar.

Llámanse *radicales semejantes* aquellos que, siendo de un mismo grado, tienen la misma cantidad subradical despues de sacar fuera todo lo que es posible.

Así, $\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$ y $\frac{2}{3}\sqrt{2}$ son radicales semejantes.

304. *Un radical no varía, si se dividen el índice y exponente de la cantidad subradical por un mismo número entero.*

Es decir, que

$$\sqrt[nm]{A^{np}} = \sqrt[m]{A^p}.$$

En efecto, segun los números (299 CONS. y 298), se tiene

$$\sqrt[nm]{A^{np}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{A^{np}}} = \sqrt[m]{(\sqrt[n]{A^p})^n} = \sqrt[m]{A^p},$$

que es lo que se queria demostrar.

De este principio se deduce que cuando el exponente de la cantidad subradical y el índice tengan un factor comun, podrá simplificarse el radical dividiendo por dicho factor comun el índice y el exponente de la cantidad que hay debajo.

Así, $$\sqrt[12]{64} = \sqrt[12]{2^6} = \sqrt{2}.$$

305. *Un radical no varía, multiplicando el índice y el exponente de la cantidad subradical por un mismo número entero entero.*

Es decir, que $\sqrt[m]{A} = \sqrt[nm]{A^n}$.

En efecto, $\sqrt[m]{A} = \left(\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}\right)^n = \left(\sqrt[nm]{a}\right)^n = \sqrt[nm]{a^n}$,

que es lo que se queria demostrar.

306. Reduccion de radicales á un mismo índice. *Para reducir varios radicales á un mismo índice, se multiplica el de cada uno y el exponente de la cantidad subradical por el producto de los índices de los demas; y si dichos índices tienen factores comunes, por el cociente que resulta de dividir el* m . c . m . *por cada uno de ellos.*

En efecto, se entiende por reducir varios radicales á un mismo índice, hallar otros equivalentes á los primeros y que tengan todos un índice comun. Esto supuesto, si se quiere reducir á un mismo índice los radicales $\sqrt{2}$ y $\sqrt[3]{5}$, se tendrá que éstos no variarán multiplicando el exponente de la cantidad subradical é índice por un mismo número (305), de modo que se podrán trasformar en $\sqrt[6]{2^3}$ y $\sqrt[6]{5^2}$, ó lo que es igual en $\sqrt[6]{8}$ y $\sqrt[6]{25}$.

Sean los radicales que hemos de reducir á un comun índice $\sqrt[4]{3}$ y $\sqrt[6]{8}$. El mínimo comun múltiplo de 4 y 6 es 12; luego dichos radicales se trasformarán en $\sqrt[12]{3^3}$ y $\sqrt[12]{8^2}$, ó lo que es lo mismo, en $\sqrt[12]{27}$ y $\sqrt[12]{64}$.

307. Suma y resta de radicales. *Para sumar radicales, se escriben unos á continuacion de otros y se hace la reduccion de los que sean semejantes.*

Sean los radicales que hemos de sumar $2\sqrt{2}$, $3\sqrt[3]{5}$, $4\sqrt{2}$, y $\sqrt[3]{5}$. Segun el número 49, tendremos

$$2\sqrt{2} + 3\sqrt[3]{5} + 4\sqrt{2} + \sqrt[3]{5} = 6\sqrt{2} + 4\sqrt[3]{5}.$$

308. *Para restar radicales, se escribe el minuendo y á con-*

tinuacion el sustraendo con signos mudados, y se hace la reduccion y destruccion de los que sean semejantes.

Si se quiere restar de $3\sqrt[3]{5}+2\sqrt{2}$, $4\sqrt{2}+\sqrt[3]{5}$, se tendrá (51)

$$3\sqrt[3]{5}+2\sqrt{2}-(4\sqrt{2}+\sqrt[3]{5})=$$

$$3\sqrt[3]{5}+2\sqrt{2}-4\sqrt{2}-\sqrt[3]{5}=2\sqrt[3]{5}-2\sqrt{2}.$$

309. MULTIPLICACION Y DIVISION DE RADICALES. *Para multiplicar varios radicales, se reducen á un mismo índice si no le tienen, y se efectúa el producto de las cantidades subradicales.*

Sean los radicales que hemos de multiplicar $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$ y $\sqrt[4]{2}$; reduciéndolos á un mismo índice, se convertirán en $\sqrt[12]{64}$, $\sqrt[12]{81}$ y $\sqrt[12]{8}$, de donde se tendrá, segun el principio (296)

$$\sqrt{2}\times\sqrt[3]{3}\times\sqrt[4]{2}=\sqrt[12]{64}\times\sqrt[12]{81}\times\sqrt[12]{8}=\sqrt[12]{64\times81\times8}.$$

310. *Para dividir dos radicales, se reducen á un mismo índice si no lo tienen, y se dividen las cantidades subradicales.*

Sean los radicales que hemos de dividir $\sqrt{3}$ y $\sqrt[3]{5}$; reduciéndoles á un mismo índice, se convertirán (296), en $\sqrt[6]{27}$ y $\sqrt[6]{25}$, de donde se deducirá, segun el número (297),

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{6}}=\frac{\sqrt[6]{27}}{\sqrt[6]{25}}=\sqrt[6]{\frac{27}{25}}.$$

311. POTENCIAS Y RAICES DE LOS RADICALES. *Para elevar un radical á una potencia, se eleva á dicha potencia la cantidad subradical.*

Sea el radical $\sqrt[n]{a}$ el cual queremos elevar á la potencia m. Se tendrá (298)

$$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m},$$

que es lo que se queria demostrar.

Si m fuese un divisor de n, en vez de elevar la cantidad subradical á la potencia m, se dividiria el índice n por el exponente m.

Así, si $n = n'm$, se tendrá (204)

$$\left(\sqrt[n'm]{a}\right)^m = \sqrt[n'm]{a^m} = \sqrt[n']{a}.$$

Si m no fuese un divisor de n, pero ámbos tuviesen un factor comun, se dividiria el índice por dicho factor comun, y la cantidad subradical se elevaria á una potencia cuyo exponente fuese el otro factor de m.

Sea el radical $\sqrt[n]{a}$ el cual queremos elevar á la potencia m, y supongamos que $n = pn'$ y $m = pm'$, se tendrá

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \left(\sqrt[pn']{a}\right)^{pm'} = \sqrt[pn']{a^{pm'}} = \sqrt[n']{a^{m'}}$$

que es lo que se queria demostrar.

312. *Para extraer una raiz de un radical, se multiplican los índices.*

Sea el radical $\sqrt[n]{a}$ cuya raiz enésima queremos hallar.

Tendremos (299)

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a},$$

que es lo que se queria demostrar.

Concluiremos esta importante teoría demostrando el siguiente principio, del cual hemos de hacer uso más adelante.

313. *La raiz del grado* n *de una cantidad cualquiera* a, *tiene por límite* 1 *á medida que* n *crece indefinidamente.*

Este principio quedará demostrado, probando que la diferencia entre la unidad y $\sqrt[n]{a}$ puede ser menor que una cantidad dada δ por pequeña que sea; para ello tenemos (272)

$$(1 - \delta)^n < a,$$

de donde deduciremos extrayendo la raiz *enésima*

$$1 - \delta < \sqrt[n]{a},$$

y agregando á los dos miembros la cantidad $\delta - \sqrt[n]{a}$, hallaremos

$$1 - \sqrt[n]{a} < \delta;$$

luego pudiendo ser la diferencia numérica entre 1 y $\sqrt[n]{a}$ menor que una cantidad δ por pequeña que sea, es claro que el límite de $\sqrt[n]{a}$, cuando n crece indefinidamente, será la unidad, segun queriamos demostrar.

SEXTA PARTE.

NÚMEROS INCONMENSURABLES. — TEORÍA DE LAS APROXIMACIONES DECIMALES.

LECCION XXXVI.

Cálculo de los números inconmensurables. — Teoría de las aproximaciones decimales. — Adicion de números aproximados. — Sustraccion de números aproximados.

Cálculo de los números inconmensurables.

314. Se ha dicho ya que número inconmensurable es aquel que proviene de la comparacion de una cantidad con su unidad, y ni ésta ni ninguna de las partes iguales en que puede dividirse está contenida exactamente en aquella.

No sólo la comparacion de una cantidad con su unidad puede darnos el número inconmensurable; tambien puede provenir de la extraccion de raices. Así, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{7}$ nos expresan números inconmensurables, segun hemos visto (278).

Los números inconmensurables, cualquiera que sea su orígen, pueden siempre expresarse aproximadamente por números conmensurables que se obtienen por medio de reglas fijas, y que el grado de aproximacion de éstos puede ser tal que el error cometido sea menor que cualquiera cantidad dada por pequeña que sea: por lo que se consideran á los números inconmensurables como límites de números conmensurables que se les aproximan indefinidamente.

Considerando á los números inconmensurables como límites de números conmensurables que se les aproximan indefinidamente, el resultado de cualquier operacion hecha con números inconmensurables será (47) el límite de los resultados de la misma hecha con los números aproximados, y el error que se comete será tanto menor, cuanto mayor sea la aproximacion de dichos números á los inconmensurables que cada uno representa.

Por consiguiente, *para efectuar cualquier operacion con números inconmensurables, se sustituyen éstos por números conmensurables que se les vayan aproximando cada vez más, y el resultado de la operacion hecha con estos números nos expresará, con un cierto error, el valor del resultado de la misma hecha con los números inconmensurables; error que será tanto menor cuanto mayor sea el grado de aproximacion de los números que sustituyen á los primeros.*

Cuando hay que hacer algun cálculo con números inconmensurables que provienen de la extraccion de raices, conviene efectuarlo directamente, segun se ha dicho en el cálculo de radicales, y expresar el resultado en decimales con la aproximacion que se quiera.

Así, el producto de $\sqrt{2}$ por $\sqrt{3}$ se hallará efectuando directamente el de los dos radicales

$$\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}:$$

de modo que hallando el valor de $\sqrt{6}$ con la aproximacion que se quiera, tendremos el del producto de los dos números inconmensurables $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$.

De todos los principios relativos á los números y operaciones hechas con los mismos, sólo tenemos que justificar en los números inconmensurables el siguiente:

315. *El producto de varios factores inconmensurables no varía, cualquiera que sea el órden en que se multipliquen.*

Sea el producto de varios factores inconmensurables *abcd*. Este producto es, segun hemos dicho ya, el límite de los que se obtienen sustituyendo en vez de los números inconmensurables valores conmensurables que se les vayan aproximando cada vez más.

Ahora bien, estos productos de números aproximados no varía cualquiera que sea el órden en que se les multiplique (56 y 169); luego su límite, que es el producto *abcd* de los números inconmensurables, tampoco variará cualquiera que sea el órden en que se efectúe la multiplicacion.

Queda pues demostrado este principio, como dijimos (56 (*)), para cualquier clase de números; y por lo tanto todos los que de él dependen son tambien verdaderos.

Teoría de las aproximaciones decimales.

316. Cuando hay que efectuar una operacion cualquiera con cierta clase de números, ya sean conmensurables ó inconmensurables, y se efectúa con otros números que nos expresan el valor aproximado de aquellos, es evidente que se cometerá un cierto error que será tanto menor cuanto mayor sea la aproximacion de dichos números á los que cada uno sustituye.

Esta sustitucion de números, muy frecuente en los decimales, é indispensable en el cálculo de números inconmensurables, ha dado orígen á los dos problemas siguientes, que constituyen la teoría de las aproximaciones:

1.° *Dados varios números aproximados en ménos de una cierta cantidad, hallar la aproximacion del resultado de una operacion cualquiera hecha con ellos.*

2.° *Dada la aproximacion que ha de tener el resultado de una operacion hecha con números aproximados, hallar la que debe tener cada uno de éstos.*

317. Todo número conmensurable ó inconmensurable se puede siempre expresar exacta ó aproximadamente por una decimal, y si de ésta sólo se toma un número limitado de cifras, 7 por ejemplo, menor que el de toda la decimal, se dice que aquel número está aproximado por defecto con siete cifras decimales; es decir, que el error que se comete es por defecto menor que media unidad del órden séptimo decimal si la siguiente cifra es menor que 5; y esa misma decimal aumentada en una unidad del último órden, en el caso de ser dicha siguiente cifra mayor que 5, nos expresa el valor del mismo número aproximado por exceso en ménos de una unidad del séptimo órden decimal.

Así, el valor del número inconmensurable 3,1415926535... aproximado con cinco cifras decimales, será 3,14159, el cual se diferencia por defecto en ménos de media unidad del quinto órden.

Adicion de números aproximados.

318. *Si se suman varios números decimales aproximados por exceso ó defecto, siendo el grado de la aproximacion distinta en cada uno de ellos, la suma vendrá aproximada en ménos de media unidad del penúltimo órden del que tenga menor grado de aproximacion, si el número de sumandos aproximados no pasa de* 10; *en ménos de media unidad del órden superior al penúltimo, si pasa de* 10 *y no llega á* 100, *y así sucesivamente.*

En efecto, el caso más desfavorable que podemos considerar es aquel en que todos los sumandos estén aproximados por defecto ó por exceso, y cuyo grado de aproximacion en todos ellos sea igual al que tiene el ménos aproximado. En este caso el error que en cada uno se comete será menor que media unidad del último órden, es decir, que si todos están aproximados por defecto en ménos de media milésima, el error que en cada uno se cometerá es menor que 5 diez milésimas, y este error repetido 9 veces á lo más, en el primer caso, producirá un error en la suma menor que 45 diez milésimas; y por tanto, la suma vendrá aproximada en ménos de media unidad del órden superior á las milésimas, ó sea en ménos de media unidad del penúltimo órden decimal.

Si el número de sumandos pasa de 10 y no llega á 100, el caso más desventajoso es que haya 99 sumandos todos aproximados en un mismo sentido, y con una aproximacion igual á la que tenga el ménos aproximado; en ese caso, siendo como ántes el error que se comete en cada uno de ellos menor que 5 diez milésimas, en la suma se cometerá un error menor que 5 diez milésimas multiplicadas por 99, que son 495 diez milésimas; número menor que media décima, que es la unidad del órden superior al penúltimo que se considera.

Es evidente que el error que en general se comete en la suma de números aproximados, será bastante menor que el límite que hemos marcado, pues no siempre estarán los sumandos aproximados ni en el mismo grado, ni en el mismo sentido; y cuando unos están aproximados por defecto y otros por exceso, hay una cierta compensacion en los errores.

Del principio anterior se deduce la regla general siguiente:

319. *Para obtener en ménos de media unidad de un cierto órden decimal la suma de varios sumandos cuyo grado de aproximacion es indeterminado, es necesario calcular unos por defecto y otros por exceso en ménos de media unidad de un órden que sea 10, 100, etc. veces menor que aquel que expresa el grado de aproximacion de la suma, segun que el número de sumandos aproximados no llegue á 10, ó pase y no llegue á 100, etc.; se efectúa la suma de estos sumandos, y despreciando, segun el caso que se considera, la primera, dos primeras, etc. cifras, teniendo cuidado de aumentar á la última en una unidad, si la siguiente pasa de 5, obtendremos la suma con la aproximacion pedida.*

Sustraccion de números aproximados.

320. *Si se restan dos números decimales aproximados ámbos por exceso ó defecto en ménos de una unidad de un cierto órden, el error que se cometa en la diferencia es menor que una unidad de dicho órden.*

En efecto, sean los números que se han de restar a y b, los cuales se reemplazan por los números aproximados a' y b', que se diferencian de los anteriores en ménos de e y e'.

Si e y e' expresaran el valor exacto de las diferencias entre a' y a, b' y b, se tendria

$$a = a' + e \quad \text{y} \quad b = b' + e',$$

de donde, segun que e sea mayor ó menor que e', se tendrá

$$a - b = a' - b' + e - e', \quad \text{ó} \quad a - b = a' - b' - (e' - e):$$

de modo que siendo los errores que se cometen en los números a' y b' menores respectivamente que e y e', el que se comete en la resta despreciando la cantidad $e - e'$ ó $e' - e$, que es lo que hay aumentar ó disminuir á $a' - b'$ para obtener la resta verdadera $a - b$, es menor que $e - e'$ ó $e' - e$, es decir, menor que la diferencia de los errores; luego si estos errores e y e' son, por ejemplo, menores que una milésima, su diferencia lo será tambien con más razon: por consiguiente si dos números decimales están aproximados por exceso ó defecto en ménos de una unidad de un cierto órden, su diferencia vendrá aproximada en ménos de una unidad de este órden.

Del principio anterior se deduce la regla general que:

321. *Para obtener en ménos de una unidad de un cierto órden decimal la diferencia de dos números aproximados, es necesario calcular éstos por exceso ó defecto en ménos de una unidad del órden á que ha de estar aproximada la diferencia, y la de estos números será la que se pide.*

LECCION XXXVII.

Multiplicacion de números aproximados.

Multiplicacion de números aproximados.

322. *Si se multiplica un número aproximado en ménos de media unidad de su último órden decimal por un número exacto, el error que se cometerá es menor que el cociente de dividir la mitad de dicho número exacto por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tiene el número aproximado.*

En efecto, sea A un número cuyo valor, aproximado por defecto en ménos de media unidad del órden n decimal, supondremos sea a, de modo que se tendrá

$$A > a \quad \text{y} \quad A < a + \frac{1}{2.10^n}.$$

Multiplicando estas cantidades por el número exacto B, ya sea entero ó fraccionario, tendremos

$$AB > aB \quad \text{y} \quad AB < aB + \frac{B}{2.10^n},$$

de donde se deduce evidentemente que el error cometido tomando por el valor del producto AB el número aB, es menor que la mitad del número B partido por 10^n, ó llamando E á este error

$$E < \frac{1}{2} B : 10^n,$$

que es lo que queriamos demostrar.

323. *Para obtener en ménos de media unidad de un cierto órden decimal el producto de un número aproximado por otro número exacto, se calcula el primero con un error menor que media unidad del órden que marque el número de cifras de la parte entera del número exacto, seguido de tantos ceros como indica el órden de la aproximacion del producto.*

Es decir, que si el producto ha de estar aproximado en ménos de una milésima ó ha de tener tres cifras decimales exactas y el factor exacto tiene cinco cifras en su parte entera, es necesario calcular el número aproximado con nueve cifras decimales por lo ménos.

En efecto, sea a el valor aproximado en ménos de media unidad de un cierto órden indeterminado x decimal de un número A, y tratamos de determinar x con la condicion de que el producto aB se diferencie del verdadero AB en ménos de media unidad de un cierto órden decimal m.

Segun el principio anterior, se tendrá

$$E < \frac{B}{2 \times 10^x};$$

de modo que si el error que se comete ha de ser menor que $\frac{1}{2 \times 10^m}$, se deberá tener evidentemente

$$\frac{B}{2.10^x} < \frac{1}{2.10^m}, \text{ ó bien } \frac{1}{10^x} < \frac{1}{B.10^m}.$$

De modo que haciendo

$$10^x > B.10^m$$

se tendrá lo que se pide. Mas para ello basta hacer x igual al número de cifras que tiene la parte entera del producto B.10^m; luego calculando el número aproximado con tantas cifras como tiene la parte entera del número exacto, seguido de tantos ceros como decimales ha de tener el producto, quedará el problema resuelto.

324. *Si se multiplican dos números aproximados cada uno de ellos en ménos de media unidad de un cierto órden decimal, el error que se comete es menor que la mitad del multiplicando*

dividido por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tiene el multiplicador, más la mitad del multiplicador dividido por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tiene el multiplicando.

Sean A y B dos números cuyos valores aproximados por defecto en ménos de media unidad decimal de los órdenes respectivos m y n son a y b, de modo que se tendrá:

$$A > a \quad \text{y} \quad A < a + \frac{1}{2 \,.\, 10^m}$$

$$B > b \quad \text{y} \quad B < b + \frac{1}{2 \,.\, 10^n}.$$

Multiplicando ordenadamente estas desigualdades, hallaremos

$$AB > ab \text{ y } AB < ab + \frac{a}{2 \,.\, 10^n} + \frac{b}{2 \,.\, 10^m} + \frac{1}{4 \,.\, 10^m \,.\, 10^n}.$$

De aquí se deduce que el valor del producto AB se halla comprendido entre las dos cantidades que forman los segundos miembros de estas desigualdades; y por tanto el error que se comete será menor que la diferencia que hay entre dichas cantidades. De modo que llamando E á este error, y despreciando la fraccion $\frac{1}{4 \,.\, 10^m \,.\, 10^n}$ por ser muy pequeña con relacion á las demas, se tendrá

$$E < \frac{a}{2 \,.\, 10^n} + \frac{b}{2 \,.\, 10^n}, \qquad [1]$$

segun queriamos demostrar.

Sea, por ejemplo, multiplicar los dos números 3,14159 y 0,352 aproximados ámbos por defecto en ménos de media unidad de su último órden respectivo.

Segun lo dicho anteriormente, un límite del error será

$$\frac{3{,}14159}{2 \times 10^3} + \frac{0{,}352}{2 \times 10^5} = \frac{1{,}57079}{1000} + \frac{0{,}176}{100000},$$

ó lo que es lo mismo,

$$\frac{1,57079}{1000} = \frac{157079}{100000000} = 0,00157079$$

$$\frac{0,176}{100000} = \frac{176}{100000000} = 0,00000176$$

Límite del error. .... . 0,00157255.

Luego el error principia en la tercera cifra decimal del producto, por lo que no se deberán considerar más que las dos primeras.

325. Si hubiese más factores se hallaria, segun el número anterior, la aproximacion del producto de dos de ellos; despues se determinaria la aproximacion del que resulta de multiplicar este producto por un tercer factor; luégo la de éste por un cuarto factor, y así sucesivamente: la aproximacion del último producto es la del producto de todos los factores.

326. El error que se comete en una potencia cualquiera de un número decimal aproximado en ménos de media unidad de su último órden, se determinará segun la regla anterior; pues la potencia de un número no es otra cosa que el producto de tantos factores iguales á este número como indica el exponente.

Así, la segunda potencia de un número aproximado en ménos de media unidad de un cierto órden decimal, estará aproximada en ménos de dicho número partido por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tiene.

327. *Para obtener en ménos de media unidad de un cierto órden decimal el producto de dos números aproximados, es necesario calcular éstos en ménos de media unidad del órden decimal que marque el número de cifras de la parte entera de la suma de los dos números dados, seguida de tantos ceros como decimales ha de tener el producto.*

Es decir, que si el producto ha de estar aproximado en ménos de media unidad del sexto órden decimal, ó lo que es igual ha de tener seis cifras decimales, y la suma de los dos números aproximados dan una parte entera que tiene tres cifras, será necesario calcular cada factor con un error menor que media unidad del órden noveno, ó sea con nueve cifras decimales.

En efecto, sean a y b los valores aproximados en ménos de media unidad decimal del órden indeterminado x, el cual queremos calcular con la condicion de que el producto *ab* se diferencie del verdadero AB en ménos de media unidad del órden *n* decimal. Segun la relacion [1] del número 324, se tendrá

$$E < \frac{a}{2 \, . \, 10^x} + \frac{b}{2 \, . \, 10^x} = \frac{a+b}{2 \, . \, 10^x}.$$

Ahora bien, el error que se ha de cometer en el producto aproximado, ha de ser menor que $\frac{1}{2 \, . \, 10^n}$; luego el valor de x que verifique á la relacion

$$\frac{a+b}{2 \, . \, 10^x} < \frac{1}{2 \, . \, 10^n} \qquad [2]$$

será evidentemente el grado de aproximacion que deberá darse á los factores. Pero de la relacion [2] se deduce

$$\frac{1}{10^x} < \frac{1}{(a+b) \times 10^n},$$

de donde

$$10^x > (a+b) \times 10^n;$$

luego x tiene que ser, por lo ménos, igual al número de cifras que tiene la parte entera de la suma $a+b$, más el número n de cifras decimales que ha de tener el producto, lo cual queriamos demostrar.

328. *Para obtener en ménos de media unidad de un cierto órden decimal, el producto de tres factores aproximados, es necesario calcular éstos en ménos de media unidad del órden decimal que marque el número de cifras de la parte entera de la suma de los productos binarios que se forman con los tres factores, seguida de tantos ceros como cifras decimales ha de tener el producto.*

En efecto, supongamos se quiere hallar en ménos de $\frac{1}{10^n}$ el producto de los tres números aproximados a, b y c. Llamemos $\frac{1}{2 \, . \, 10^x}$ un límite del error que se ha de cometer en cada uno de ellos, y se tendrá, segun el caso anterior, que un límite del producto de dos factores A y B, será

$$AB + \frac{1}{2 \cdot 10^x}(A + B) + \frac{1}{2 \cdot 10^{2x}};$$

de modo que multiplicando este límite por el del tercer factor, que es $C + \frac{1}{10^x}$, se tendrá

$$\left(AB + \frac{1}{2 \cdot 10^x}(A + B) + \frac{1}{2 \cdot 10^{2x}}\right)\left(C + \frac{1}{2 \cdot 10^x}\right) =$$
$$ABC + \frac{1}{2 \cdot 10^x}(AC + BC) + \frac{C}{2 \cdot 10^{2x}} + \frac{1}{2 \cdot 10^x} AB +$$
$$\frac{1}{2 \cdot 10^{2x}}(A + B) + \frac{1}{2 \cdot 10^{3x}} = ABC + \frac{1}{2 \cdot 10^x}(AB + AC + BC) +$$
$$\frac{1}{2 \cdot 10^{2x}}(A + B + C) + \frac{1}{2 \cdot 10^{3x}}.$$

Donde vemos qne un límite del error que se comete en el producto de los tres factores A, B y C es, despreciando los dos últimos sumandos por ser su suma muy pequeña con relacion al primero,

$$\frac{1}{2 \cdot 10^x}(AB + AC + BC);$$

y haciendo que este límite sea menor que el que se nos da para el producto, hallaremos el grado con que se deben calcular los factores.

Por consiguiente, x deberá satisfacer á la condicion

$$\frac{1}{2 \cdot 10^x}(AB + AC + BC) < \frac{1}{2 \cdot 10^n},$$

de donde

$$\frac{1}{10^x} < \frac{1}{10^n(AB + AC + BC)};$$

para lo cual basta que se tenga

$$10^x > 10^n(AB + AC + BC);$$

luego x ha de ser igual, por lo ménos, al número de cifras que tiene la parte entera de la suma de los productos binarios $AB + AC + BC$, más el número de cifras decimales que ha de tener el producto, que es lo que se queria demostrar.

329. Continuando del mismo modo llegariamos á demostrar que si fuesen m los factores aproximados y hubiéramos de tener el producto con un error menor que $\frac{1}{2 \,.\, 10^n}$, *era necesario calcular cada uno de los factores con tantas cifras decimales como tiene la parte entera de la suma de los productos de* $m - 1$ *en* $m - 1$ *de los números dados, más el número* n *de cifras decimales que ha de tener el producto.*

330. De este principio general se deduce que si se quisiera en ménos de $\frac{1}{10^n}$ la potencia m de un número aproximado A, *seria necesario calcular éste con un número de cifras decimales igual al número de cifras que tiene la parte entera de* mA^{m-1}, *más el número* n *de cifras decimales que ha de tener la potencia.*

En efecto, no hay más que suponer que los m factores son iguales á A, en cuyo caso los productos tomados de $m - 1$ en $m - 1$ se reducen á A^{m-1}, los cuales se hallarán repetidos m veces.

LECCION XXXVIII.

Division de números aproximados.

Division de números aproximados.

331. En la division de números aproximados distinguiremos tres casos: 1.°, que el dividendo sea aproximado y el divisor exacto; 2.°, que sea exacto el dividendo y aproximado el divisor; 3.°, que dividendo y divisor sean aproximados.

Primer caso. Si se divide un número aproximado en ménos de media unidad decimal del órden n por un número exacto B, el error que se cometerá en el producto será menor que

$$\frac{1}{2 \,.\, B \,.\, 10^n}.$$

En efecto, sea a el dividendo aproximado al dividendo verdadero A, en ménos de media unidad del órden n decimal; de modo que tendremos

$$A > a \quad \text{y} \quad A < a + \frac{1}{2.10^n}.$$

Dividiendo por B, se tendrá

$$\frac{A}{B} > \frac{a}{B} \quad \text{y} \quad \frac{A}{B} < \frac{a}{B} + \frac{1}{2.B.10^n}.$$

De estas desigualdades se deduce que tomando por el verdadero el cociente aproximado, se comete un error menor que la fraccion $\frac{1}{2.B.10^n}$, segun queriamos demostrar.

El órden que marque la primera cifra significativa hallada en la conversion de esta fraccion ordinaria en decimal, indicará la primera que se debe despreciar en el cociente.

332. *Para obtener en ménos de media unidad de un cierto órden decimal el cociente de dividir un número aproximado por un exacto, es necesario calcular el primero en ménos de media unidad decimal marcada por el número de cifras que tiene la parte entera de* $\frac{10^m}{B}$ *siendo* m *el número de cifras decimales que ha de tener el cociente.*

En efecto, sea a el dividendo aproximado en ménos de un cierto órden indeterminado x el cual tratamos de hallar, sea B el divisor exacto, y m el número de cifras decimales que ha de tener el cociente. Se tendrá, segun el caso anterior, por un límite del error $\frac{1}{2.B.10^x}$, y como éste ha de ser menor que $\frac{1}{2.10^m}$, se deberá verificar la relacion

$$\frac{1}{2.10^x.B} < \frac{1}{2.10^m},$$

para lo cual es necesario que

$$10^x.B > 10^m, \text{ de donde } 10^x > \frac{10^m}{B};$$

luego x, que es el número de cifras decimales del cociente, ha de ser, por lo ménos, igual al número de cifras que tiene la parte entera de $\frac{10^m}{B}$, que es lo que se queria demostrar.

333. SEGUNDO CASO. *Si se divide un número exacto por un número aproximado en ménos de media unidad decimal del órden* n, *el cociente vendrá aproximado en ménos del que resulta de dividir el dividendo por el doble del cuadrado del divisor, seguido de tantos ceros como decimales hay en dicho divisor.*

En efecto, sea A el dividendo exacto, y B el divisor cuyo valor aproximado en ménos de media unidad del órden n decimal es b.

Tendremos por lo tanto

$$B > b \quad \text{y} \quad B < b + \frac{1}{2.10^n},$$

y dividiendo A por estas cantidades, se hallará

$$\frac{A}{B} < \frac{A}{b} \quad \text{y} \quad \frac{A}{B} > \frac{A}{b + \frac{1}{2.10^n}} = \frac{2A.10^n}{2b.10^n + 1}.$$

Donde vemos que el cociente $\frac{A}{B}$ se halla comprendido entre $\frac{A}{b}$ y $\frac{2A.10^n}{2b.10^n+1}$; luego el error que se comete será menor que

$$\frac{A}{b} - \frac{2A.10^n}{2b.10^n+1} = \frac{A}{2b^2.10^n + b},$$

y con más razon, se tendrá llamando E á este error

$$E < \frac{A}{2b^2.10^n},$$

segun queriamos demostrar.

334. *Para obtener en ménos de media unidad de un cierto órden decimal el cociente de dividir un número exacto por otro aproximado, es necesario calcular éste en ménos de media unidad de un órden decimal marcado por el número de cifras decimales que ha de tener el cociente, más las que tiene la parte*

entera del que resulta de dividir el dividendo por el cuadrado del divisor.

Sea A un dividendo exacto, b un divisor aproximado en ménos de media unidad del órden indeterminado x, el cual queremos hallar, y n el número de cifras decimales que ha de tener el cociente.

Se tendrá que un límite del error cometido será, segun el número anterior, $\frac{A}{2 \cdot b^2 \cdot 10^x}$; de modo que x deberá satisfacer á la condicion de ser este límite menor que el marcado para el cociente; es decir, que se deberá tener

$$\frac{A}{2 \cdot b^2 \cdot 10^x} < \frac{1}{2 \cdot 10^n}, \text{ de donde } 10^x > \frac{A}{b^2} \times 10^n;$$

para lo cual basta que x sea igual ó mayor que el número de cifras que tiene la parte entera de $\frac{A}{b^2}$, más n, que es lo que se queria demostrar.

335. Tercer caso. *Si se dividen entre sí dos números* a *y* b *aproximados en ménos de media unidad del órden* n *decimal, se cometerá un error menor que* $\frac{a+b}{2b \cdot 10^n}$.

Sean A y B dos números, y a y b sus valores aproximados en ménos de media unidad del órden n decimal. Supongamos ademas el caso más desventajoso de estar aproximado por exceso el dividendo A, y por defecto el divisor B.

De modo que se tendrá

$$A > a - \frac{1}{2 \cdot 10^n} \text{ y } A < a$$

$$B < b + \frac{1}{2 \cdot 10^n} \text{ y } B > b;$$

de aquí deduciremos

$$\frac{A}{B} > \frac{a - \frac{1}{2 \cdot 10^n}}{b + \frac{1}{2 \cdot 10^n}} \text{ y } \frac{A}{B} < \frac{a}{b}.$$

Hallándose el cociente verdadero comprendido entre las dos cantidades que forman los segundos miembros, el error que se comete será menor que su diferencia

$$\frac{a}{b}-\frac{a-\frac{1}{2.10^n}}{b+\frac{1}{2.10^n}}=\frac{a}{b}-\frac{2a.10^n-1}{2b.10^n+1}=\frac{a+b}{2b^2.10^n+b};$$

y con más razon se tendrá, llamando E á este error,

$$E<\frac{a+b}{2b^2.10^n},$$

según queriamos demostrar.

336. *Para obtener en ménos de media unidad de un cierto órden decimal el cociente de dividir dos números aproximados, es necesario calcular éstos en ménos de una unidad de un órden decímal marcado por el número de cifras que tiene la parte entera del cociente de dividir por el cuadrado del divisor la suma de los dos números multiplicada por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales ha de tener el cociente.*

En efecto, sean a y b los números aproximados en ménos de una unidad de un cierto órden decimal indeterminado x, el cual queremos hallar, y n el número de cifras decimales que ha de tener el cociente.

Siendo x el órden de la aproximacion del dividendo y divisor, el error que se cometerá en el cociente será menor, segun el número anterior, que $\frac{a+b}{2b^2 10^n}$, pues haciendo que este límite sea menor que el error del cociente, se tendrá

$$\frac{a+b}{2b^2 10^x}<\frac{1}{2.10^n};$$

de donde se deduce

$$\frac{10^n(a+b)}{b^2}<10^x.$$

Para que esta relacion se verifique es necesario que x sea igual ó mayor que el número de cifras que tiene la parte entera del cociente de dividir por el cuadrado del divisor, el producto de la suma de los dos números dados por 10^n, que es lo que se queria demostrar.

Observacion. Como la aproximacion de un número se obtiene generalmente por decimales, hemos desarrollado esta teoría tomando por límites de los errores en cada caso especial, media unidad de un cierto órden decimal; pero de la misma manera se hubieran hallado los que nos hemos propuesto determinar, si los límites de los datos en cada cuestion hubieran sido otros cualesquiera.

SÉPTIMA PARTE.

RAZONES, PROPORCIONES Y PROBLEMAS QUE DE ELLAS DEPENDEN.

LECCION XXXIX.

Razones.— Proporciones.— Equidiferencias.— Proporciones aritméticas continuas. — Proporciones geométricas.— Proporciones geométricas continuas.— Proporciones armónicas.

RAZONES.

337. El resultado de la comparacion de dos números se llama *razon* ó *relacion* de estos números.

Las *razones* ó *relaciones* pueden ser de dos modos: razones por diferencia ó *aritméticas*, y razones por cociente ó *geométricas*.

338. *Razon por diferencia* ó *aritmética* es el resultado de la comparacion de dos números con el objeto de ver en cuánto uno excede ó es excedido del otro; de modo que la razon aritmética de dos números es la diferencia que hay entre ellos: así, la razon aritmética de 6 á 4 es 2, diferencia que hay entre 4 y 6.

339. *Razon por cociente* ó *geométrica* es el resultado de la comparacion de dos números con el objeto de ver cuántas veces el uno contiene ó está contenido en el otro; de modo que la razon geométrica de dos números es el cociente que resulta de dividir el uno por el otro: así, la razon geométrica de 12 á 4 es 3, cociente que resulta de dividir 12 por 4; la de 3 á 4 será $\frac{3}{4}$.

En una razon se llama *antecedente* el número que se compara, y *consecuente* aquel con el cual se compara; ámbos se llaman términos de la razon.

Las razones se escriben generalmente poniendo el antecedente, despues el consecuente, y entre ellos uno ó dos puntos, segun que la razon sea aritmética ó geométrica. Así, 6 · 4 es una razon por diferencia ó àritmética, y se lee 6 es á 4. Del mismo modo 12 : 3 expresa una razon geométrica, la cual se lee del mismo modo, 12 es á 3; ámbas expresiones pueden ser reemplazadas respectivamente por 6 — 4 y $\frac{12}{3}$.

Se dice que una razon geométrica es *inversa* de otra cuando el antecedente de la primera es el consecuente de la segunda, y recíprocamente: así $\frac{12}{4}$ y $\frac{4}{12}$ son dos razones inversas.

El producto de dos razones inversas es igual á la unidad.

340. *La razon geométrica de dos cantidades conmensurables de una misma naturaleza, es la misma que la de los números que expresan las veces que cada una contiene á la medida comun.*

Sean dos cantidades A y B de una misma naturaleza y conmensurables, es decir, que tienen una medida comun que podremos representar por M; supongamos que esta medida comun está contenida p veces en A, y q veces en B; de modo que se tendrá

$$A = pM \text{ y } B = qM;$$

y la razon de las dos cantidades A y B será

$$\frac{A}{B} = \frac{pM}{qM};$$

y como M, cualquiera que sea la unidad que se elija, siempre expresa un número que multiplica á los dos términos de la fraccion $\frac{p}{q}$, se podrá simplificar dividiendo por M, lo que nos da

$$\frac{A}{B} = \frac{p}{q},$$

segun queriamos demostrar.

341. *La razon geométrica de dos cantidades inconmensurables de una misma naturaleza, ès el límite de las relaciones sucesivas que se obtienen, reemplazando estas cantidades por otras conmensurables que se les aproximan indefinidamente.*

Sean A y B dos cantidades inconmensurables de una misma naturaleza; supongamos una cantidad M de la misma especie que las anteriores, la cual podremos suponer tan pequeña como queramos; consideremos á M como una medida de A y B, y supongamos que está contenida respectivamente en cada una de ellas p y q veces, dando los restos a y b; de modo que se tendrá

$$A = pM + a \quad \text{y} \quad B = qM + b,$$

de donde se deduce

$$A - a = pM \quad \text{y} \quad B - b = qM;$$

y dividiendo ordenadamente, se tendrá

$$\frac{A-a}{B-b} = \frac{pM}{qM} = \frac{p}{q}.$$

Ahora bien, las cantidades a y b son tanto más pequeñas, cuanto menor sea M; y como M puede ser tan poco diferente de cero como queramos, los límites de a y b son *cero;* por consiguiente la relacion $\frac{A-a}{B-b}$ tiende hácia un cierto límite, á medida que a y b se aproximan al suyo; pero a y b tienen por límite, como ya hemos dicho, *cero;* luego el límite de la relacion $\frac{A-a}{B-b}$ es $\frac{A}{B}$: queda, pues, demostrado que la relacion de las dos cantidades inconmensurables A y B es el límite de las relaciones sucesivas de cantidades conmensurables $A - a$ y $B - b$, las cuales se aproximan indefinidamente á las primeras.

PROPORCIONES.

342. Proporcion es la igualdad de dos razones de una misma especie.

Las proporciones pueden ser *aritméticas* ó *geométricas*, segun que las razones que las forman sean tambien aritméticas ó geométricas. Las proporciones aritméticas se llaman generalmente *equidiferencias*. Cuando sólo se dice una proporcion, se sobreentiende es geométrica.

Las proporciones se escriben ordinariamente poniendo una razon á continuacion de la otra separadas por dos ó cuatro puntos, segun que la proporcion sea aritmética ó geométrica: así, $6 \cdot 4 : 10 \cdot 8$ es una proporcion aritmética que se lee: 6 es á 4 como 10 es á 8; y $12 : 3 :: 20 : 5$ es una proporcion geométrica, la cual se lee del mismo modo, 12 es á 3 como 20 es á 5. Las proporciones se escriben tambien, y es lo más propio, expresando la igualdad de sus razones. Así, las proporciones anteriores se escribirán $6 - 4 = 10 - 8$, y $\frac{12}{3} = \frac{20}{5}$.

En toda proporcion hay cuatro términos: los dos primeros forman la primera razon, los dos segundos la segunda; el primero y tercero se llaman *antecedentes* de la proporcion, y el segundo y cuarto *consecuentes*. Se llaman *extremos* de una proporcion el primero y cuarto número, y *medios* el segundo y tercero.

Equidiferencias.

343. *En toda equidiferencia la suma de extremos es igual á la suma de medios*, y recíprocamente, *si la suma de dos números es igual á la de otros dos, los cuatro números forman una equidiferencia, cuyos extremos son los dos sumandos de una suma, y cuyos medios son los otros dos.*

Sean cuatro los números a, b, c y d que están en proporcion aritmética, es decir, que se tiene

$$a - b = c - d.$$

Agregando á los dos miembros de la igualdad anterior la suma de los consecuentes $b + d$, se tendrá

$$a - b + b + d = c - d + b + d;$$

y simplicando, será

$$a + d = b + c,$$

que es lo primero que se queria demostrar.

Sean, en segundo lugar, cuatro números a, b, c y d que cumplen con la condicion de ser $a + d = b + c$; quitando de ámbos miembros la suma de los términos b y d, se tendrá

$$a + d - (b + d) = b + c - (b + d),$$

ó lo que es lo mismo, efectuando la resta indicada, se hallará

$$a + d - b - d = b + c - b - d;$$

y simplificando,

$$a - b = c - d,$$

que es lo segundo que se queria demostrar.

344. *Un extremo de una equidiferencia es igual á la suma de los medios ménos el otro extremo; y un medio cualquiera es igual á la suma de los extremos ménos el otro medio.*

Sea la equidiferencia $a - b = c - d$; segun la propiedad demostrada en el número anterior, se tiene

$$a + d = b + c,$$

de donde se deduce fácilmente

$$d = b + c - a \quad \text{ó} \quad c = a + d - b,$$

que es lo que se queria demostrar.

Proporciones aritméticas contínuas.

345. Se llama *proporcion aritmética contínua* aquella cuyos términos medios son iguales. Así, la proporcion

$$a \cdot b : b \cdot c \quad \text{ó} \quad a - b = b - c$$

es una proporcion contínua.

En la proporcion contínua el término medio se llama *medio diferencial*, y cualquiera de los extremos, *tercero diferencial*.

La propiedad fundamental en las proporciones aritméticas contínuas es que *la suma de extremos es igual al duplo del término medio*, y recíprocamente, *si tres números son tales que la suma de dos de ellos es igual al duplo del tercero, dichos tres números formarán una proporcion aritmética contínua*.

De esta propiedad se deduce que un tercero diferencial á dos números es igual al duplo del término medio ménos el otro extremo; y un medio diferencial es igual á la mitad de la suma de los otros dos.

Proporciones geométricas.

346. *En toda proporcion geométrica el producto de extremos es igual al de medios,* y recíprocamente, *si el producto de dos números es igual al de otros dos, los cuatro formarán una proporcion cuyos medios serán los dos factores de un producto y cuyos extremos serán los del otro.*

Sea la proporcion

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d};$$

multiplicando esta igualdad por el producto bd de los consecuentes, se tendrá

$$\frac{abd}{b}=\frac{cbd}{d}, \text{ ó lo que es lo mismo } ad=cb,$$

que es lo primero que se queria demostrar.

Sean en segundo lugar a, b, c y d cuatro números que cumplen con la condicion

$$ad=bc,$$

y por tanto vamos á demostrar que dichos cuatro números forman una proporcion.

Dividiendo la igualdad anterior por el producto de los dos números b y d que han de ser los consecuentes, se tendrá

$$\frac{ad}{bd}=\frac{cb}{bd}, \text{ y simplificando, } \frac{a}{b}=\frac{c}{d},$$

que es lo segundo que se queria demostrar.

347. *En toda proporcion geométrica un extremo cualquiera es igual al cociente de dividir el producto de los medios por el otro extremo, y un medio igual al producto de los extremos partido por el otro medio.*

En efecto, sea la proporcion $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Segun el número anterior, se tiene

$$ad=bc,$$

de donde se saca fácilmente

$$d=\frac{bc}{a} \quad \text{ó} \quad c=\frac{ad}{b}.$$

Proporciones geométricas contínuas.

348. Llámase *proporcion geométrica contínua* aquella cuyos medios son iguales. Así, la proporcion

$$a : b :: b : c \quad ó \quad \frac{a}{b} = \frac{b}{c}$$

es una proporcion contínua.

En la proporcion contínua el término medio se llama *medio proporcional*, y cualquiera de los extremos *tercero proporcional*.

La propiedad fundamental de las proporciones geométricas contínuas, es que *el producto de extremos es igual al cuadrado del término medio*, y recíprocamente, *si tres números son tales que el producto de dos de ellos es igual al cuadrado del tercero, dichos tres números forman una proporcion geométrica contínua.*

De esta propiedad se deduce que un tercero proporcional á dos números es igual al cuadrado del término medio partido por el otro extremo; y un medio proporcional entre dos números es igual á la raiz cuadrada del producto de dichos números.

Proporciones armónicas.

349. Se dice que cuatro números están en *proporcion armónica*, ó forman una proporcion armónica, cuando la diferencia de los dos primeros es á la de los dos últimos, como el primero es al último.

Los números 12, 8, 20 y 15 forman una proporcion armónica; pues se tiene, segun la definicion,

$$\frac{12 - 8}{20 - 15} = \frac{12}{15} \quad ó \quad \frac{4}{5} = \frac{12}{15}.$$

En general, cuatro números a, b, c y d estarán en proporcion armónica siempre que entre ellos se verifique la relacion

$$\frac{a - b}{c - d} = \frac{a}{d}.$$

Se llama proporcion *enarmónica* la que resulta de invertir una de las razones que forman la proporcion armónica. Así, los cuatro números a, b, c y d formarán una proporcion enarmónica si entre ellos se verifica la relacion

$$\frac{a-b}{c-d}=\frac{d}{a}.$$

Cuando los dos términos medios de una proporcion armónica son iguales, se dice que los tres diferentes que resultan forman una *proporcion armónica contínua.* Así, los tres números a, b y c formarán una proporcion armónica contínua, siempre que se verifique la relacion

$$\frac{a-b}{b-c}=\frac{a}{c};$$

cuya relacion es la misma que se obtendria de suponer los cuatro números a, b, b y c, de los cuales como se ve son iguales los dos términos medios.

350. De la definicion de proporcion armónica se deduce el modo de hallar un término de una proporcion de esta especie, conociendo los otros tres.

En efecto, sea, por ejemplo, hallar el cuarto término de la proporcion armónica cuyos tres primeros son a, b y c.

Segun la definicion se tendrá

$$\frac{a-b}{c-x}=\frac{a}{x},$$

de donde se deduce sucesivamente

$$(a-b)\,x=ac-ax$$
$$(2a-b)\,x=ac$$
$$x=\frac{ac}{2a-b}.$$

Si se tratase de hallar un medio armónico, se tendria

$$\frac{a-b}{x-d}=\frac{a}{d},\quad \text{de donde}\quad x=\frac{d\,(2a-b)}{a}.$$

Si se quisiera hallar un medio proporcional armónico, se tendria

$$\frac{a-x}{x-c}=\frac{a}{c},\quad \text{de donde}\quad x=\frac{2ac}{a+c}.$$

Si fuese un tercero proporcional armónico el que quisiéramos buscar, tendriamos

$$\frac{a-b}{b-x}=\frac{a}{x}, \text{ de donde } \quad x=\frac{ab}{2a-b}.$$

Cada una de las anteriores fórmulas puede traducirse en regla práctica para hallar el término que representa, lo cual por ser muy sencillo lo dejamos al cuidado de los alumnos.

LECCION XL.

Propiedades importantes de las proporciones.

Propiedades importantes de las proporciones.

351. *Alternar* una proporcion es comparar antecedente con antecedente y consecuente con consecuente; é *invertir* es comparar consecuente con antecedente en ámbas razones.

352. *Toda proporcion se puede alternar sin que deje de subsistir.*

Es decir, que si se tiene $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$,

se tendrá tambien $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$.

En efecto, de la proporcion $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ se deduce que

$$ad=bc;$$

y partiendo por el producto cd, se tendrá

$$\frac{ad}{cd}=\frac{cd}{bc}, \text{ ó simplificando, } \frac{a}{c}=\frac{b}{d},$$

que es lo que se queria demostrar.

353. *Se puede invertir una proporcion sin que deje de subsistir.*

Sea la proporcion $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; segun la propiedad fundamental, se tiene $ad=bc$ ó $bc=ad$, de donde se deduce fácilmente, dividiendo por el producto ac y simplificando,

$$\frac{a}{b}=\frac{d}{c},$$

que es lo que se queria demostrar.

354. De los dos principios anteriores se deduce que toda proporcion se puede escribir de ocho modos diferentes sin que deje por ello de subsistir.

En efecto, alternando é invirtiendo sucesivamente la proporcion $a:b::c:d$, se tendrán los ocho modos de escribir una proporcion, segun se ve á continuacion:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d},\ \frac{a}{c}=\frac{b}{d},\ \frac{c}{a}=\frac{d}{b},\ \frac{c}{d}=\frac{a}{b}$$

$$\frac{d}{c}=\frac{b}{a},\ \frac{d}{b}=\frac{c}{a},\ \frac{b}{d}=\frac{a}{c},\ \frac{b}{a}=\frac{d}{c}.$$

Si se invirtiese la última, obtendriamos otra vez la primera.

355. *En toda proporcion, la suma de los dos primeros términos es á la suma de los dos segundos, como el segundo es al cuarto, ó como el primero es al tercero.*

Sea la proporcion $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

Aumentando á las dos fracciones una unidad, se tendrá

$$\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1;$$

de donde reduciendo el entero á la especie del quebrado, será

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d},\text{ ó bien }\frac{a+b}{c+d}=\frac{b}{d}.$$

Del mismo modo se tendrá en la proporcion

$$\frac{b}{a}=\frac{d}{c}\text{ que }\frac{b+a}{d+c}=\frac{a}{c};$$

luego $\frac{a+b}{c+d}=\frac{b}{d}=\frac{a}{c}$, que es lo que se queria demostrar.

CONSECUENCIA. *En toda proporcion la suma de antecedentes es á la suma de consecuentes, como un antecedente es á su consecuente.*

Sea la proporcion $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; alternando, se tendrá $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$, en la cual se verificará, como ya se ha demostrado, que

$$\frac{a+c}{b+d}=\frac{c}{d}=\frac{a}{b},$$

que es lo que se queria demostrar.

356. *En toda proporcion la diferencia de los dos primeros términos es á la de los dos últimos, como el segundo es al cuarto, ó como el primero es al tercero.*

Sea la proporcion $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; supongamos que ámbas fracciones son mayores que la unidad, y se tendrá

$$\frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1 \quad \text{ó} \quad \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d},$$

de donde $\frac{a-b}{c-d}=\frac{b}{d}$; pero de la proporcion propuesta se deduce $\frac{b}{d}=\frac{a}{c}$; luego poniendo en vez de la razon $\frac{b}{d}$ su igual $\frac{a}{c}$, se tendrá $\frac{a-b}{c-d}=\frac{b}{d}=\frac{a}{c}$.

Si las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ no fuesen mayores que la unidad, invirtiendo la proporcion dada $a:b::c:d$, se tendrá $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$, y aplicando á esta proporcion los mismos razonamientos que arriba, puesto que las fracciones $\frac{b}{a}$ y $\frac{d}{c}$ son mayores que la unidad, será

$$\frac{b-a}{d-c}=\frac{b}{d}=\frac{a}{c},$$

que es lo que faltaba demostrar.

CONSECUENCIA. *En toda proporcion, la diferencia de los antecedentes es á la de consecuentes, como un antecedente es á su consecuente.*

Sea la proporcion $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Alternando se hallará $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$, y aplicando á esta proporcion el principio que acabamos de demostrar, tendremos, segun que a sea $>$ ó $<b$,

$$\frac{a-c}{b-d}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad \text{ó} \quad \frac{c-a}{d-b}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d},$$

que es lo que se queria probar.

357. *En toda proporcion la suma de los dos primeros términos es á su diferencia, como la suma de los dos últimos es á la suya.*

Sea la proporcion $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

De lo ya demostrado (355 y 356) se deduce, si $a>b$,

$$\frac{a+b}{c+d}=\frac{b}{d} \quad \text{y} \quad \frac{a-b}{c-d}=\frac{b}{d},$$

de donde

$$\frac{a+b}{c+d}=\frac{a-b}{c-d} \quad \text{ó} \quad \frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d};$$

y si $a<b$, se tendrá del mismo modo

$$\frac{b+a}{b-a}=\frac{d+c}{d-c},$$

que es lo que se queria demostrar.

CONSECUENCIA. *En toda proporcion la suma de antecedentes es á su diferencia, como la suma de consecuentes es á la suya.*

Sea la proporcion $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

Alternando y aplicando á esta proporcion lo dicho anteriormente, se tendrá, segun sea $a>$ ó $<b$,

$$\frac{a+c}{a-c}=\frac{b+d}{b-d} \quad \text{ó} \quad \frac{a+c}{c-a}=\frac{b+d}{d-b}.$$

358. *En toda proporcion se pueden multiplicar ó partir por un mismo número los dos términos de una razon, lo mismo que los antecedentes ó consecuentes, sin que varíe la proporcion.*

Sea la proposicion $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

Si se multiplican ó parten los dos términos de la fraccion $\frac{a}{b}$ ó $\frac{c}{d}$ por un mismo número, dicha fraccion no se altera (153–3.°); luego la proporcion no deja de subsistir multiplicando ó dividiendo por un mismo número los dos términos de una razon.

Si se multiplican ó parten los dos antecedentes por un mismo número, lo cual equivale á multiplicar ó partir las razones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ por dicho número, las razones que resulten tambien serán iguales; luego la proporcion no varía multiplicando ó partiendo los antecedentes por un mismo número.

Del mismo modo se demostraria que se pueden multiplicar ó partir por un mismo número los consecuentes de una proporcion sin que por ello varíe.

359. *Las potencias de un mismo grado de los cuatro términos de una proporcion están tambien en proporcion.*

Sean los cuatro números a, b, c y d que forman la proporcion $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

Elevando las dos razones que son iguales á la potencia m, se tendrá

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m=\left(\frac{c}{d}\right)^m \text{ ó bien } \frac{a^m}{b^m}=\frac{c^m}{d^m},$$

lo cual queriamos demostrar.

360. *Las raices del mismo índice de los cuatro términos de una proporcion forman tambien proporcion.*

Sea la proporcion $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

Extrayendo la raiz m de ámbos miembros, se tendrá

$$\sqrt[m]{\frac{a}{b}}=\sqrt[m]{\frac{c}{d}} \text{ ó bien } \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}=\frac{\sqrt[m]{c}}{\sqrt[m]{d}},$$

que es lo que se queria demostrar.

361. *Si dos proporciones tienen una razon comun, con las otras dos podemos formar proporcion.*

Sean las dos proporciones que tienen una razon comun

$$\frac{a}{b}=\frac{m}{n} \text{ y } \frac{c}{d}=\frac{m}{n}.$$

Como dos cosas iguales á una tercera son iguales entre sí, se tiene evidentemente

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d},$$

que es lo que se queria demostrar.

Consecuencia. *Si dos proporciones tienen los antecedentes ó los consecuentes respectivamente iguales, con los consecuentes ó antecedentes se podrá formar una nueva proporcion.*

Sean las dos proporciones que tienen los antecedentes iguales

$$\frac{m}{a}=\frac{n}{b}, \quad \frac{m}{c}=\frac{n}{d}.$$

Alternando se tiene

$$\frac{m}{n}=\frac{a}{b}, \quad \frac{m}{n}=\frac{c}{d},$$

de donde, segun el principio anterior, se tendrá

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

Del mismo modo se deduciria de las proporciones

$$\frac{a}{m}=\frac{b}{n}, \quad \frac{c}{m}=\frac{d}{n}$$

la nueva proporcion $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, segun queriamos demostrar.

362. *Los productos de multiplicar término á término dos ó más proporciones, están en proporcion.*

Sean las proporciones

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d},\ \frac{a'}{b'}=\frac{c'}{d'},\ \frac{a''}{b''}=\frac{c''}{d''}.$$

Multiplicando, se tendrá

$$\frac{a}{b}\times\frac{a'}{b'}\times\frac{a''}{b''}=\frac{c}{d}\times\frac{c'}{d'}\times\frac{c''}{d''}\ \text{ó}\ \frac{aa'a''}{bb'b''}=\frac{cc'c''}{dd'd''},$$

segun queriamos demostrar.

Las razones de la nueva proporcion es el producto de las razones de las proporciones dadas.

363. *Los cocientes de dividir término á término dos proporciones, están en proporcion.*

Sean las dos proporciones $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ y $\frac{a'}{b'}=\frac{c'}{d'}$, en las cuales se verifica

$$ad=bc \quad \text{y} \quad a'd'=b'c';$$

dividiendo miembro á miembro, será

$$\frac{ad}{a'd'}=\frac{bc}{b'c'},$$

ó lo que es lo mismo

$$\frac{a}{a'}\times\frac{d}{d'}=\frac{b}{b'}\times\frac{c}{c'},$$

de donde se deduce (167–3.^er^ *caso*)

$$\frac{a}{a'}:\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}:\frac{d}{d'},$$

que es lo que se queria demostrar.

La razon de la nueva proporcion es igual al cociente de las razones de las proporciones dadas.

LECCION XLI.

Serie de razones iguales. — De las medianas.

Serie de razones iguales.

364. Se dice que varios pares de números forman una serie de razones iguales, cuando la razon que forma cada par es constante.

Así, los pares de números 2 y 3, 4 y 6, 12 y 18, 60 y 90, etc., forman una serie de razones iguales, porque

$$\frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{12}{18}=\frac{60}{90}.$$

La razon comun evidentemente es $\frac{2}{3}$.

365. *En toda serie de razones iguales la suma de los antecedentes es á la de consecuentes como un antecedente es á su consecuente.*

Sea la serie de razones iguales

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}\ \ldots=\frac{l}{l'} \qquad [1].$$

Llamemos q á la razon comun, y se tendrá

$$a=a'q,\ b=b'q,\ c=c'q \ldots l=l'q \qquad [2].$$

Sumando ordenadamente y sacando el factor comun q del segundo miembro, se hallará

$$a+b+c+\ldots+l=(a'+b'+c'+\ldots+l')\times q.$$

Dividiendo ahora por el factor que multiplica á la razon q y poniendo en vez de esta letra una de las razones iguales que representa, tendremos, segun queriamos demostrar,

$$\frac{a+b+c+\ldots+l}{a'+b'+c'+\ldots+l'}=q=\frac{a}{a'}.$$

Consecuencia. En toda serie de razones iguales la suma de un cierto número de antecedentes es á la de los consecuentes correspondientes, como la suma de otro cierto número de antecedentes es á la de sus correspondientes consecuentes.

366. *En toda serie de razones iguales, el producto de* m *antecedentes es al producto de los consecuentes correspondientes como la* emésima *potencia de un antecedente es á la* emésima *potencia de su consecuente.*

Multiplicando las igualdades [2] deducidas de la serie de razones iguales [1], se tendrá, suponiendo que sean en número m,

$$a \times b \times c \times \ldots \times l = a'q \times b'q \times c'q \times \ldots \times l'q = a' \times b' \times c' \times \ldots \times l' \times q^m.$$

De donde se deduce

$$\frac{a \times b \times c \times \ldots \times l}{a' \times b' \times c' \times \ldots \times l'} = q^m = \left(\frac{a}{a'}\right)^m = \frac{a^m}{a'^m}.$$

367. *En toda serie de razones iguales, la raiz* emésima *de la suma de las potencias* emésimas *de los antecedentes es á la raiz* emésima *de la suma de las* emésimas *potencias de los consecuentes, como la suma de antecedentes es á la de consecuentes.*

Elevando la serie de razones iguales [1] á la *emésima* potencia, se tendrá esta otra serie:

$$\frac{a^m}{a'^m} = \frac{b^m}{b'^m} = \frac{c^m}{c'^m} = \ldots = \frac{l^m}{l'^m},$$

de donde se deducirá (365)

$$\frac{a^m + b^m + c^m + \ldots + l^m}{a'^m + b'^m + c'^m + \ldots + l'^m} = \frac{a^m}{a'^m}.$$

Extrayendo la raiz *emésima* de ámbos miembros, se hallará

$$\frac{\sqrt[m]{a^m + b^m + c^m + \ldots + l^m}}{\sqrt[m]{a'^m + b'^m + c'^m + \ldots + l'^m}} = \frac{a}{a'};$$

pero se tiene $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{a + b + c + \ldots + l}{a' + b' + c' + \ldots + l'}$;

luego

$$\frac{\sqrt[m]{a^m + b^m + \ldots + l^m}}{\sqrt[m]{a'^m + b'^m + \ldots + l'^m}} = \frac{a + b + \ldots + l}{a' + b' + \ldots + l'}.$$

CONSECUENCIA. La raiz *emésima* de la suma de las *emésimas* potencias de los antecedentes de una serie de razones iguales es á la raiz *emésima* de la suma de las potencias *emésimas* de los consecuentes, como la raiz *enésima* de la suma de las potencias *enésimas* de los antecedentes es á la raiz *enésima* de la suma de las *enésimas* potencias de los consecuentes.

De las medianas.

368. Se llama en general *mediana* de varias cantidades una cantidad mayor que la menor, y menor que la mayor.

Entre el infinito número de medianas que entre varias cantidades podemos considerar, dos son las más principales, y se distinguen con los nombres de *medianas diferenciales ó aritméticas* y *medianas proporcionales ó geométricas*.

Se llama *mediana diferencial ó aritmética* aquella que se obtiene dividiendo la suma de varias cantidades por el número de ellas.

Mediana proporcional ó geométrica es la que resulta extrayendo del producto de varias cantidades la raiz cuyo índice sea igual al número de ellas.

Que las cantidades obtenidas segun las definiciones anteriores son medianas tales como en general se han definido, es muy sencillo probar.

Sean en primer lugar dos cantidades a y b de las cuales se tenga $a > b$. Si sumamos sucesivamente á los dos miembros de esta desigualdad las cantidades a y b, hallaremos

$$a+a=2a>a+b, \quad \text{de donde} \quad a>\frac{a+b}{2}$$

$$a+b>b+b=2b, \quad \text{de donde} \quad b<\frac{a+b}{2}.$$

Vemos, pues, que $\frac{a+b}{2}$ es una cantidad que se halla comprendida entre a y b, es decir, que es mayor que la menor b y menor que la mayor a; luego es una mediana tal como en general se ha definido.

Esta mediana diferencial tiene la propiedad, como inmediatamente se ve, de diferenciarse de a y b en una misma cantidad $\frac{a-b}{2}$.

Sean, en segundo lugar, varias cantidades

$$a > b > c > d \ldots > l,$$

con las cuales podemos establecer las relaciones

$$a = a,\ a > b,\ a > c,\ a > d \ldots a > l;$$

que sumadas ordenadamente y suponiendo que sean en número p, tendremos

$$ap > a+b+c+\ldots+l, \quad \text{ó} \quad a > \frac{a+b+c+\ldots+l}{p}.$$

De la misma manera tendremos

$$l < a,\ l < b,\ l < c \ldots l = l,$$

de donde

$$pl < a+b+c+\ldots+l, \quad \text{ó} \quad l < \frac{a+b+c+\ldots+l}{p}.$$

369. Pasemos á demostrar que las medianas proporcionales ó geométricas son realmente medianas tal como en general se han definido; es decir, que se hallan comprendidas entre la mayor y menor de las cantidades de que son medianas.

Sean en primer lugar dos cantidades y supongamos que $a > b$. Multiplicando sucesivamente por a y por b, tendremos

$$a^2 > ab \text{ y } ab > b^2, \text{ de donde } a > \sqrt{ab} \text{ y } \sqrt{ab} > b.$$

Luego $\sqrt{ab}$, ó sea la mediana proporcional entre a y b, se halla comprendida entre estas cantidades.

Sean, en segundo lugar, varias cantidades en número n $a > b > c \ldots > l$, con las cuales podremos establecer las relaciones

$$a = a,\ a > b,\ a > c, \ldots a > l,$$

que multiplicadas, nos dan

$$a^n > abc \ldots l, \text{ ó bien } a > \sqrt[n]{abc \ldots l}.$$

Del mismo modo tendremos

$$l < a,\ l < b,\ l < c \ldots l = l,$$

de donde

$$l^n < abc \ldots l, \text{ ó bien } l < \sqrt[n]{abc \ldots l}.$$

Luego lo mediana proporcional ó geométrica, ó sea la raiz del producto de varias cantidades cuyo índice sea el número de éstas, es una mediana segun la hemos definido en general.

370. *La fraccion que resulta de sumar término á término varios quebrados desiguales, es una mediana entre estos quebrados.*

Sean los quebrados $\frac{a}{a'} > \frac{b}{b'} > \frac{c}{c'} > \ldots > \frac{l}{l'}$.

Llamando q al valor de la mayor de estas fracciones, tendremos sucesivamente

$$a = a'q,\ b < b'q,\ c < c'q \ldots l < l'q$$

$$a + b + c + \ldots + l < (a' + b' + c' + \ldots + l')\, q$$

$$\frac{a + b + c + \ldots + l}{a' + b' + c' + \ldots + l'} < q = \frac{a}{a'}.$$

Del mismo modo llamando q' al valor del menor quebrado, tendremos

$$a > a'q',\ b > b'q',\ c > c'q' \ldots l = l'q'$$

$$a + b + c + \ldots + l > (a' + b' + c' + \ldots + l')\, q'$$

$$\frac{a + b + c + \ldots + l}{a' + b' + c' + \ldots + l'} > q' = \frac{l}{l'}.$$

Luego la fraccion que resulta de sumar término á término varios quebrados desiguales, se halla comprendida entre el mayor y menor de estos quebrados, y por tanto es una mediana, segun queriamos demostrar.

Observacion. Si hacemos $a' = b' = c' = \ldots = l = 1$, se convertiria la mediana anterior en la mediana diferencial.

371. *La mediana aritmética de dos cantidades es mayor que la mediana geométrica.*

Sea $a > b$, representemos por d la diferencia que hay entre estas cantidades, y tendremos que el valor de la mediana aritmética será

$$\frac{a+b}{2} = \frac{b+d+b}{2} = b + \frac{d}{2}.$$

La mediana geométrica será

$$\sqrt{ab} = \sqrt{(b+d)\,b} = \sqrt{b^2+bd}.$$

Como en general $\sqrt{ab}$ es un número inconmensurable, no podremos compararle directamente con la mediana aritmética; pero si los valores de ámbas medianas los elevamos al cuadrado, tendremos

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = b^2 + bd + \frac{d^2}{4}$$

$$(\sqrt{ab})^2 = b^2 + bd.$$

El primer cuadrado excede al segundo en la cantidad $\frac{d^2}{4}$, luego si el cuadrado de la mediana aritmética es mayor que el de la geométrica, es claro que aquella será mayor que ésta, segun queriamos demostrar.

Observacion. Á medida que la diferencia d vaya creciendo, la mediana aritmética se diferenciará más de la geométrica, y por el contrario, disminuyendo la diferencia d, las dos medianas tienden á ser iguales, y por tanto podrá en algunos casos sustituirse la una por la otra; mas para ello conviene expresar el error que se comete tomando la una por la otra.

Si representamos por M la mediana aritmética, y por m la geométrica, tendremos, segun hemos visto anteriormente,

$$M^2 - m^2 = \frac{d^2}{4},$$

y como la diferencia de cuadrados es igual á la suma por la diferencia de las raices, se tiene

$$(M+m)(M-m) = \frac{d^2}{4},$$

de donde

$$M - m = \frac{d^2}{4(M+m)},$$

cuya fórmula nos expresa el error que se comete sustituyendo una de las medianas por la otra.

372. *En toda serie de razones iguales la mediana geométrica entre la suma de los antecedentes y la de los consecuentes, es igual á la suma de las medianas geométricas de los dos términos de cada razon.*

Sea la serie de razones iguales

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \dots = \frac{l}{l'} = q.$$

Segun lo demostrado ya (365), se deducirá

$$\frac{a+b+c+\dots+l}{a'+b'+c'+\dots+l'} = q,$$

de donde

$$a+b+c+\dots+l = q\,(a'+b'+c'+\dots+l').$$

Multiplicando ahora ámbos miembros por la suma

$$a'+b'+c'+\dots+l',$$

se tendrá

$$(a+b+c+\dots+l)(a'+b'+c'+\dots+l') = (a'+b'+c'+\dots+l')^2\,q.$$

Extrayendo la raiz cuadrada de los dos miembros, se hallará

$$\sqrt{(a+b+c+\dots+l)(a'+b'+c'+\dots+l')} = (a'+b'+c'+\dots+l')\sqrt{q}.$$

Efectuando el producto indicado en el segundo miembro, introduciendo debajo de los radicales las cantidades a', b', c', etc., y haciendo la reduccion despues de poner sucesivamente en vez de q su valor $\frac{a}{a'}$, $\frac{b}{b'}$, etc., se tendrá finalmente, segun queriamos demostrar,

$$\sqrt{(a+b+c+\dots+l)(a'+b'+c'+\dots+l')} = \sqrt{aa'} + \sqrt{bb'} + \dots + \sqrt{ll'}.$$

LECCION XLII.

Cantidades proporcionales. — Regla de tres simple. — Regla de tres compuesta.

Cantidades proporcionales.

373. Si dos cantidades están ligadas entre sí de tal modo que, variando una de ellas, la otra varía forzosamente tambien y recíprocamente, se dice que la una depende de la otra; por lo que las distinguiremos con los nombres de *causas* y *efectos*.

374. Dos efectos de una misma naturaleza son directamente proporcionales á sus causas; y recíprocamente, dos causas de una misma naturaleza son directamente proporcionales á sus efectos respectivos, cuando suponiendo que una de estas causas es un cierto número de veces mayor ó menor que la otra, su efecto correspondiente es el mismo número de veces mayor ó menor que el otro; y recíprocamente.

Así, por ejemplo, se dice que los espacios que recorre un cuerpo con una velocidad constante, son directamente proporcionales á los tiempos que emplea en recorrerlos, y recíprocamente. En efecto, si un cuerpo recorre en un cierto tiempo un espacio determinado, en un tiempo doble, triple, etc. recorrerá, segun se sabe por la Física, un espacio doble, triple, etc. que el primero; y por el contrario si un cuerpo recorre un espacio en un cierto tiempo, para recorrer otro que sea doble, triple, etc., necesita tambien un tiempo doble, triple, etc. que el primero.

375. Dos efectos de una misma naturaleza son inversamente proporcionales á sus causas; y recíprocamente, dos causas son inversamente proporcionales á sus efectos respectivos, cuando suponiendo que una de estas causas se hace un cierto número de veces mayor ó menor, su efecto correspondiente se hace este mismo número de veces menor ó mayor que el otro; y recíprocamente.

Así, por ejemplo, se dice que los tiempos que tarda un cuerpo para recorrer un espacio, son inversamente proporcionales á las velocidades que lleva; y recíprocamente, las velocidades que lleva un cuerpo para recorrer un espacio, son inversamente proporcionales á los tiempos en que ha de recorrerlo. En efecto, por la Física se sabe que si un cuerpo con una cierta velocidad recorre un cierto espacio en una cantidad de tiempo, llevando doble, triple, etc. velocidad recorrerá el mismo espacio en la mitad, tercera, etc. parte de tiempo que la primera vez.

La proporcionalidad de las cantidades, unas veces se admite como verdades evidentes, otras como convenios, y otras, finalmente, como verdades cuya exactitud se demuestra en las ciencias á que pertenecen.

Regla de tres simple.

376. Habiendo convenido en distinguir con el nombre de *causas* y *efectos* las cantidades que estando íntimamente ligadas entre sí, sean directa ó inversamente proporcionales, diremos que *regla de tres simple es aquella por medio de la cual se resuelve el problema de dadas dos causas, que son directa ó inversamente proporcionales á sus efectos, y uno de estos efectos, hallar el otro: ó dados dos efectos que son directa ó inversamente proporcionales á sus causas, y una de estas causas, hallar la otra.*

La regla de tres se dice que es *directa* cuando los efectos son directamente proporcionales á las causas, é *inversa* cuando lo son inversamente.

Como los efectos son directamente proporcionales á las causas, cuando aumentando ó disminuyendo éstas, aumentan ó disminuyen aquellos en la misma proporcion, se dice que segun las causas vayan de mayor á mayor ó de menor á menor, los efectos van tambien en la regla de tres *directa* de mayor á mayor ó de menor á menor; es decir, que á mayor ó menor causa, corresponde mayor ó menor efecto, y al contrario.

Si los efectos son inversamente proporcionales á las causas, aumentando ó disminuyendo éstas, disminuyen ó aumentan en la misma proporcion aquellos; por lo que se dice en las reglas de tres *inversas* que si las causas van de mayor á menor, ó de menor á mayor, los efectos van de menor á mayor ó de mayor á menor; es decir, que á mayor causa corresponde menor efecto, y al contrario.

De modo que la regla de tres simple será directa cuando á mayor ó menor causa corresponda mayor ó menor efecto, ó como se dice abreviadamente, *cuando vaya de mayor á mayor ó menor á menor*. Y será inversa cuando á mayor ó menor causa, corresponda á menor ó mayor efecto, ó *cuando vaya de mayor á menor, ó de menor á mayor*.

377. Como el problema que se resuelve por una regla de tres simple directa ó inversa, queda reducido en último resultado á encontrar el cuarto término de una proporcion, toda la dificultad consiste en plantearla de modo que su cuarto término sea el que se busca; para lo cual despues de bien examinado el problema y visto si el resultado debe aumentar ó disminuir á medida que su causa aumente ó disminuya, ó si por el contrario debe aumentar ó disminuir á medida que aquella disminuya ó aumente, sabremos si la proporcion va de mayor á mayor, de menor á menor, de mayor á menor, ó de menor á mayor; visto lo cual, se colocarán los dos términos conocidos de igual naturaleza del modo que indica el cuadro siguiente:

Si la proporcion va	de mayor á mayor ó de menor á mayor,	el mayor á la derecha.
Y si la proporcion va	de menor á menor ó de mayor á menor,	el menor á la derecha.

Despues se colocan los otros dos, de modo que el cuarto sea siempre el que se busca.

Ejemplos. 1.° Si 8 *hombres* hacen 38 *varas* de una cierta obra en un dia, 12 *hombres*, cuántas harán?

Los datos se escriben así:

8 *hombres* hacen 38 *varas*.
12 *id*. cuánto harán? x »

Como 12 hombres harán más que 8, x será mayor que 38, por consiguiente la proporcion va de *mayor* á *mayor;* por lo que se planteará poniendo á la derecha el mayor número de hombres: así

$$8 : 12 :: 38 : x.$$

Dividiendo por 4 los dos términos de la primera razon y luégo por 2 los antecedentes, lo cual no altera la proporcion (358), se tendrá

$$1 : 3 :: 19 : x, \quad \text{de donde} \quad x = 19 \times 3 = 57$$

varas que harán los 12 hombres.

2.° 12 *hombres* hacen 57 *varas* de una obra.
8 *id*. cuánto harán? x »

Debiendo hacer 8 hombres ménos que 12, la proporcion va de *menor* á *menor*, y se tendrá

$$12 : 8 :: 57 : x.$$

Dividiendo por 4 los dos términos de la primera razon y por 3 los antecedentes, será

$$1 : 2 :: 19 : x, \quad \text{de donde} \quad x = 19 \times 2 = 38$$

varas que harán los 8 hombres.

3.° 8 *hombres* hacen una obra en 36 *dias*.
12 *id*. en cuántos la harán? En x »

Como á más hombres se necesita ménos tiempo para hacer una cierta obra, la proporcion va de *mayor* á *menor*, y por consiguiente se tendrá

$$12 : 8 :: 36 : x;$$

y simplificando, será $1 : 8 :: 3 : x,$

de donde $x = 2 \times 8 = 24$

dias que necesitan emplear los 12 hombres.

4.° 12 *hombres* necesitan 24 *dias* para hacer una obra.
8 *id*. cuántos necesitarán? x.

Como 8 hombres necesitan más dias de los que han necesitado 12 hombres para hacer una obra, la proporcion irá de *menor* á *mayor;* de modo que se tendrá

$$8 : 12 :: 24 : x;$$

simplificando, será $\quad 1 : 12 :: 3 : x,$

de donde $\quad x = 3 \times 12 = 36$

dias que necesitan los 8 hombres para hacer la obra.

NOTA. Los dos primeros ejemplos son de regla de tres directa, y los dos últimos de regla de tres inversa.

378. Estos ejemplos, lo mismo que todos los que se resuelven por proporciones, pueden tambien resolverse por el método llamado de *reduccion á la unidad*. Cuyo método consiste en hacer una aplicacion directa en el problema de que se trata, de los usos que de las cuatro operaciones fundamentales hemos explicado al principio de la Aritmética.

Resolvamos por el método de reduccion á la unidad estos cuatro ejemplos.

EJEMPLOS: 1.° Si 8 *hombres* hacen 38 *varas* de una obra en un dia, 12 *hombres* cuántas harán?

RESOLUCION. Si 8 hombres hacen 38 varas, un hombre solo hará $\frac{38}{8}$; y 12 harán $\frac{38}{8} \times 12 = \frac{38 \times 12}{8} = 19 \times 57$ varas.

2.° RESOLUCION. 12 hombres hacen 57 varas: por tanto un hombre solo hará $\frac{57}{12}$, y 8 hombres harán $\frac{57}{12} \times 8 = 19 \times 2 = 38$ varas.

3.° RESOLUCION. 8 hombres hacen una obra en 36 dias: por consiguiente, un hombre solo la haria en 36×8, y 12 hombres la harán en $\frac{36 \times 8}{12} = 3 \times 8 = 24$.

4.° RESOLUCION. Si 12 hombres necesitan para hacer una obra 24 dias, un hombre solo necesitará 12×24, y 8 hombres la harán en $\frac{12 \times 24}{8} = 12 \times 3 = 36$ dias.

Cuyos cuatro resultados están conformes con los hallados anteriormente por el método de las proporciones.

Regla de tres compuesta.

379. *Regla de tres compuesta* es aquella por medio de la cual se resuelven los problemas que dependen de dos ó más proporciones.

Para plantear una regla de tres compuesta, no hay más que ir estableciendo las proporciones á que dan orígen las diferentes reglas de tres simples que se obtienen suponiendo sucesivamente comunes todas las condiciones ménos una en el problema que se resuelve. La cantidad desconocida de la última proporcion será la incógnita de la cuestion, la cual se hallará multiplicando ordenadamente todas las proporciones, y determinando el cuarto término de la que resulta despues de simplificada.

Ejemplo. Si 8 *hombres* en 12 *dias* han hecho una zanja de 120 *varas* de larga, 18 *varas* de profunda y 3 de ancha; 12 *hombres* en 8 *dias*, cuántas varas harán de otra zanja de 12 *varas* de profunda y 4 de larga?

Los datos se escriben así:

8 *homb.* en 12 *dias* hacen 120 *v.* l. 18 *v.* p. 3 *v.* a.
12 » en 8 » cuántas? x » de 12 » y 4 »

Para plantear este problema se establecerán las proporciones siguientes:

$$\begin{array}{ll} 1.^a \ldots\ldots\ldots & 8:12::120:x' \\ 2.^a \ldots\ldots\ldots & 12:\ 8::x':x'' \\ 3.^a \ldots\ldots\ldots & 12:18::x'':x''' \\ 4.^a \ldots\ldots\ldots & 4:\ 3::x''':x \end{array} \qquad [1]$$

las cuales se han obtenido diciendo: si 8 hombres en 12 dias hacen una zanja de 120 varas de larga, 18 de profunda y 4 de ancha; 12 hombres en el mismo tiempo, cuántas varas harán de otra que tenga la misma profundidad y anchura? Representando por x' el resultado, se hallará la proporcion 1.ª

Si 12 hombres en 12 dias hacen una zanja de x' varas de larga, 18 de profunda y 4 de ancha; cuánto harán en 8 dias, de otra que tenga la misma profundidad y anchura? Representando por x'' el resultado, se obtiene la proporcion 2.ª

Si 12 hombres en 8 dias hacen una zanja de x'' varas de larga, 18 varas de profunda y 4 de ancha; cuántas varas harán de otra que tenga 12 varas de profunda y la misma anchura? Representando por x''' el resultado, se obtiene la proporcion 3.ª

Y por último, si 12 hombres en 8 dias hacen una zanja de x''' varas de larga, 12 de profunda y 3 de ancha; cuánto harán de otra que teniendo la misma profundidad su anchura sea 4 varas? Representando por x el resultado, se hallará la 4.ª y última proporcion.

De modo que la última incógnita x nos expresará las varas que harán 12 hombres en 8 dias, de una zanja de 12 varas de profunda y 4 de larga, en el supuesto de que 8 hombres en 12 dias hacen 120 varas de otra que tiene 18 de profunda y 3 de ancha.

El valor de dicha incógnita x se podria obtener hallando primero el valor de x' en la primera proporcion, sustituyendo su valor en la segunda y hallando el de x'', poniendo este valor en la tercera y hallando el de x''', y por último sustituyendo este valor en la cuarta y hallando el de x; pero es más sencillo determinar dicho valor multiplicando las proporciones [1], por cuyo medio desaparecen las incógnitas auxiliares x', x'' y x'''. Así, efectuando dicha multiplicacion, se tiene la proporcion compuesta

$$8\times12\times12\times4 : 12\times8\times18\times3 :: 120 : x;$$

la cual se reduce, quitando los factores comunes de los dos términos de la primera razon y de los antecedentes, á

$$1 : 9 :: 15 : x,$$

de donde $$x = 15\times9 = 135$$

varas que harán de la zanja en cuestion, los 12 hombres en 8 dias.

380. En la práctica se disponen los cálculos abreviadamente así:

$$\left.\begin{array}{r}8 : 12\\ 12 : 8\\ 12 : 18\\ 4 : 3\end{array}\right\} :: 120 : x.$$

En donde se sobreentiende que los términos de la primera razon son el producto de las razones comprendidas en la llave, las cuales se forman directamente, como se ha dicho en la regla de tres simple, prescindiendo sucesivamente de todas las condiciones ménos una.

Por consiguiente, quitando factores de los términos de la primera razon, se tiene

$$\left.\begin{matrix} 1 : 1 \\ 1 : 1 \\ 2 : 3 \\ 4 : 3 \end{matrix}\right\} :: 120 : x,$$

ó lo que es lo mismo $\quad 8 : 9 :: 120 : x,$

y dividiendo por 8 los antecedentes, será

$$1 : 9 :: 15 : x, \text{ de donde } x = 15 \times 9 = 135,$$

que es el número de varas hallado anteriormente.

LECCION XLIII.

Regla de interes. — Regla de descuento.

Regla de interes.

381. Se llama *interes* de un capital, lo que éste produce, durante un cierto tiempo, prestado con la condicion de que cada 100 unidades de dinero reporten al prestador una cierta cantidad anual, la cual se llama *tanto por ciento*.

El interes puede ser *simple* y *compuesto;* se dice que el interes es simple, cuando las ganancias que produce un capital cada año no forman parte del mismo capital, y por consiguiente no producen nada. El interes se llama compuesto cuando los producidos en cada año por el capital, se agregan al mismo para que á su vez ganen lo que les corresponda en lo sucesivo.

382. *Regla de interes* es aquella por medio de la cual se determina la ganancia de un capital prestado á un tanto por 100 anual, ya sea á interes simple ó compuesto.

En la regla de interes hay que considerar el *capital* que se impone ó presta, el *tanto* por 100 á que se presta, el *tiempo* que dura el préstamo y la *ganancia* que reporta.

383. INTERES SIMPLE. La regla de interes simple está fundada en los dos principios siguientes:

1.° *Las ganancias de un capital son proporcionales á los tiempos que está prestado.*

2.° *Las ganancias de dos capitales prestados por un mismo tiempo son proporcionales á dichos capitales.*

384. *El producto del capital por el interes y por el tiempo es igual á cien veces la ganaucia.*

En efecto, sea C el capital, t el tiempo, i el tanto por 100 y G la ganancia; segun los dos principios fundamentales de la regla de interes, queda el problema reducido á la siguiente regla de tres compuesta:

Ganando 100 *reales* en 1 año i *reales*,
el capital C en t años, ¿cuánto ganará? G.

Llamando x á la ganancia del capital C en un año, se tendrán las proporciones

$$100 : C :: i : x$$
$$1 : t :: x : G,$$

las cuales multiplicadas ordenadamente, nos dan despues de quitar el factor x de los dos términos de la segunda razon

$$100 : Ct :: i : G;$$

de donde se deduce

$$Cit = 100\, G,$$

que es lo que se queria demostrar.

385. De la relacion anterior se deduce que conociendo tres de las cuatro cantidades que entran en la regla de interes, se puede determinar la cuarta; por cuyo medio se obtienen cuatro expresiones ó fórmulas, con las cuales se resuelven todos los problemas relativos al interes simple.

Así, la expresion ó fórmula que da el valor de la *ganancia*, conociendo el *capital*, *interes* y *tiempo*, es

$$G = \frac{Cit}{100} \qquad [1].$$

La fórmula que da el *capital* en valores de la *ganancia, interes* y *tiempo,* es

$$C = \frac{100\,G}{it} \qquad [2].$$

La que da el *interes,* cuando se conoce el *capital, tiempo* y *ganancia,* es

$$i = \frac{100\,G}{Ct} \qquad [3].$$

Y por último, la que da el *tiempo* en valores del *capital, interes* y *ganancia,* es

$$t = \frac{100\,G}{Ci} \qquad [4].$$

Con estas cuatro fórmulas se pueden resolver todos los problemas relativos al interes simple.

EJEMPLOS. 1.° *¿Qué ganancia producirá en 4 años el capital* 8000 *duros, al* 6 *p.* $^0/_0$ *anual?* (*)

Aplicando la fórmula [1] se tendrá

$$G = \frac{8000 \times 6 \times 4}{100} = 80 \times 6 \times 4 = 1920 \textit{ duros}.$$

2.° *¿Qué capital se deberá poner al* 6 *p.* $^0/_0$ *anual, para que en 4 años produzca* 1920 *duros?*

Por la fórmula [2] se tiene

$$C = \frac{100 \times 1920}{6 \times 4} = \frac{192000}{24} = 8000 \textit{ duros}.$$

3.° *¿A qué interes se deberá prestar el capital* 8000 *duros, para que en 4 años produzca* 1920 *duros?*

De la fórmula [3] se deduce que

$$i = \frac{100 \times 1920}{8000 \times 4} = \frac{192000}{32000} = \frac{192}{32} = 6.$$

4.° *¿Cuánto tiempo se deberá tener prestado al* 6 *p.* $^0/_0$ *el capital* 8000 *duros, para que dé* 1920 *duros de ganancia?*

(*) El signo p. $^0/_0$, que se lee *por ciento,* sirve para expresar el tanto por 100 á que se presta ó impone un capital.

Segun la fórmula [4] se tiene

$$t = \frac{100 \times 1920}{8000 \times 6} = \frac{192000}{48000} = \frac{192}{48} = 4 \text{ años}.$$

386. **Interes compuesto.** El objeto principal de la regla de interes compuesto, es hallar en lo que se convierte un capital al cabo de un cierto tiempo prestado á interes compuesto, á un tanto por ciento anual.

En las cuestiones de interes compuesto se conviene en que al final de cada unidad de tiempo, se incorpore al capital los intereses devengados en aquella unidad, para que éstos ganen en lo sucesivo sus intereses correspondientes.

Esto supuesto, por medio de varias reglas de interes simple, podremos hallar en lo que se convierte un capital prestado á interes compuesto.

En efecto, suponiendo que la unidad de tiempo á que está impuesto un capital sea el año; es decir, que el tanto por ciento de ganancia sea anual, podremos hallar lo que dicho capital produce en el primer año, y uniendo ganancias y capital obtendremos el del segundo año; cuya ganancia podremos tambien determinar, la cual agregada al capital del segundo año tendremos el del tercero, y así sucesivamente. El último capital hallado expresará en lo que se convierte el capital propuesto al cabo de un cierto tiempo, prestado á interes compuesto, y la diferencia entre estos dos capitales será la ganancia que dicho capital ha producido.

Por este medio se determina la fórmula que liga las cuatro cantidades que entran en las cuestiones de interes compuesto.

Para lo cual supondremos que sea c el capital actual, t el tiempo, r el interes que produce un real en un año, y C el capital unido con los intereses al fin de los t años.

Puesto que un real produce r al cabo de un año, el capital c producirá cr; por lo tanto, al fin del primer año el capital c se habrá convertido en

$$c + cr = c(1 + r).$$

Este capital se convertirá al final del segundo año en

$$c(1 + r)(1 + r) = c(1 + r)^2.$$

Del mismo modo se verá que al final del tercer año se tendrá por capital

$$c(1+r)^3;$$

y en general al cabo de t años se tendrá

$$C=c(1+r)^t.$$

Esta fórmula liga las cuatro cantidades C, c, r y t, de la cual se deducirá el valor de una de ellas, conociendo el de las otras tres.

Cuando t no es un número exacto de años, sino que expresa un cierto número de años, más un cierto número de meses ó dias, se determina, por la fórmula, en lo que se reduce el capital al cabo de los años que hay en t, y al resultado se le añaden los intereses del mismo, correspondientes á los meses ó dias que contiene ademas el tiempo t.

Regla de descuento.

387. La regla de *descuento* tiene por objeto determinar la cantidad que debe descontarse de una letra que debiéndose pagar al cabo de cierto tiempo, se cobra, con un tanto por ciento de descuento anual, ántes de finalizar el plazo.

Si una persona tiene una *letra* ó *pagaré* que debe cobrar al cabo de un cierto tiempo, y quiere verificarlo ántes de finalizar el plazo, es justo que si halla quien tome dicha letra ó pagaré, convengan en que el tomador no dé en la actualidad el valor total de la letra que se llama *nominal*, sino que debe descontar los intereses que produciria la cantidad que anticipa, llamada *valor actual;* por lo tanto el problema que se ha de resolver es, hallar qué cantidad debe pagar en la actualidad, para que suponiendo que deba ganar un tanto por ciento anual, las ganancias en el tiempo que hay hasta el vencimiento, unidas á la cantidad que adelanta, den una suma igual al valor nominal de la letra.

Sin embargo que lo dicho anteriormente es lo que está más en armonía con la justicia, no es lo que más se usa en el descuento de los pagarés, sino que el tomador de la letra, ó sea el que anticipa el dinero, no sólo cobra ó descuenta los intereses de la cantidad que adelanta, ó sea del valor actual de la letra, sino que tambien descuenta los intereses del descuento; y por consiguiente este método no es tan justo como el anterior, puesto que el tomador de la letra cobra intereses de una cantidad que no presta, cual es la diferencia que hay entre el valor actual de la letra y el valor nominal.

Por consiguiente, distinguiremos dos clases de descuentos: el que se hace del valor actual de la letra, y el del valor nominal de la misma.

388. **Descuento del valor actual de la letra.** Siendo V el valor nominal de la letra, V′ el valor actual, *i* el tanto por ciento de descuento, *t* el tiempo á que dicha letra es pagadera, y D el descuento que hay que hacer; se tendrá que D debiendo ser la ganancia del capital V′ en el tiempo *t*, será (385)

$$D = \frac{V'it}{100} \quad \text{ó} \quad 100\,D = V'it \qquad [1].$$

Por otra parte se tiene que el valor nominal de una letra es igual al valor actual, más el descuento; luego

$$V = V' + D, \qquad [2]$$

de donde

$$V' = V - D.$$

Poniendo el valor de V′ en la igualdad [1], se tiene

$$100\,D = (V - D)\,it = Vit - Dit.$$

Agregando á los dos miembros el producto D*it*, y sacando D factor comun, se tendrá

$$D\,(100 + it) = Vit;$$

de donde dividiendo por $100 + it$, se tiene

$$D = \frac{Vit}{100 + it}.$$

Por esta fórmula se halla el descuento del valor actual de una letra cuyo valor nominal es V, *t* el tiempo á que es pagadera, é *i* el tanto por ciento.

389. Si en vez de hallar en la igualdad [2] el valor de V′,

hallásemos el del descuento D, y lo sustituyéramos en la igualdad [1], se tendria

$$100\,(V - V') = V'it \text{ ó } 100\,V - 100\,V' = V'it.$$

Agregando á los dos miembros 100 V′, y sacando V′ factor comun, se tendrá

$$100\,V = V'(100 + it),$$

de donde dividiendo por $100 + it$, se tiene el valor actual de la letra

$$V' = \frac{100\,V}{100 + it}.$$

390. Descuento del valor nominal de la letra. Como el descuento no es más que la ganancia que produce el capital del cual se descuenta, impuesto por el tiempo t al i p. %, se tendrá, representando dicho descuento por D′,

$$D' = \frac{Vit}{100}.$$

Por cuya fórmula se halla el valor del descuento que generalmente hacen los comerciantes, ó sea el descuento del valor nominal de la letra.

Comparando este descuento con el hallado anteriormente, se ve que es mayor, como en realidad debia ser, y la diferencia que hay entre ellos, no es más que los intereses al i p. % del verdadero descuento, correspondientes al tiempo t.

En efecto, dicha diferencia es

$$D' - D = \frac{Vit}{100} - \frac{Vit}{100 + it} = \frac{Vi^2t^2}{100\,(100 + it)};$$

y los intereses del descuento D son tambien

$$G = \frac{\dfrac{Vit}{100 + it} \times it}{100} = \frac{Vi^2t^2}{100\,(100 + it)}.$$

LECCION XLIV.

Regla de sociedad. — Regla de aligacion. — Regla conjunta.

Regla de sociedad.

391. La regla de sociedad tiene por objeto hallar la ganancia ó pérdida que corresponde á cada uno de varios asociados, conociendo los capitales de éstos, los tiempos que los tuvieron impuestos, y la ganancia ó pérdida correspondiente al capital de todos, llamado capital social.

La regla de sociedad está fundada en los tres principios siguientes:

1.° *Las ganancias ó pérdidas de dos capitales que están impuestos un mismo tiempo en una sociedad, son proporcionales á dichos capitales.*

2.° *Las ganancias ó pérdidas de un capital, son proporcionales á los tiempos que dicho capital está impuesto en la sociedad.*

3.° *Las ganancias ó pérdidas de dos capitales que están impuestos diferentes tiempos en una sociedad, son proporcionales á los productos de los tiempos por los capitales.*

De estos tres principios, los dos primeros se admiten como evidentes, aunque el segundo no es completamente exacto; el tercero se deduce de los dos primeros.

En efecto, sean C y C′ dos capitales, que están impuestos en una sociedad durante los tiempos T y T′; sean G y G′ las ganancias correspondientes. Representemos por G″ la ganancia del capital C impuesto durante el tiempo T′, y tendremos, segun el segundo principio, que las ganancias G y G″ serán proporcionales á los tiempos que el capital C ha estado impuesto; es decir, que se tendrá

$$\frac{G}{G''}=\frac{T}{T'}.$$

Las ganancias G″ y G′ correspondientes á los capitales C y C′

impuestos por el tiempo T′, serán, segun el primer principio, proporcionales á dichos capitales; esto es,

$$\frac{G''}{G}=\frac{C}{C'}.$$

Multiplicando ordenadamente estas dos proporciones y quitando el factor comun G'' de los dos términos de la primera razon, se tiene

$$\frac{G}{G'}=\frac{C\times T}{C'\times T'},$$

que es lo que se queria demostrar.

392. Quedando pues reducida la regla de sociedad á dividir entre varios socios un cierto capital, proporcionalmente á los capitales que impusieron, si el tiempo es el mismo; á los tiempos, si los capitales son iguales, y á los productos de los tiempos por los capitales cuando tiempos y capitales son distintos; veamos cómo en general se resuelve el problema de *dividir un cierto número en partes proporcionales á otros números dados.*

Sea N el número que hay que dividir en partes proporcionales á los números a, a', a'', a''' ... Representemos por x, x', x'', x''' ... las partes en que N queda dividido, y segun las condiciones del problema, se tendrá

$$\frac{a}{x}=\frac{a'}{x'}=\frac{a''}{x''}=\ldots$$

Como en toda serie de razones iguales la suma de antecedentes es á la de consecuentes, como un antecedente cualquiera es á su consecuente (365), y observando que la suma de los consecuentes $x+x'+x''+x'''+\ldots$ es igual al número propuesto N, se tendrá, representando por S la suma de los antecedentes $a+a'+a''+a'''\ldots$,

$$\frac{S}{N}=\frac{a}{x}=\frac{a'}{x'}=\frac{a''}{x''}=\ldots$$

De donde podemos deducir los valores de x, x', x'' ..., los cuales se hallan, *dividiendo el número propuesto por la suma de los números á que han de ser proporcionales las partes, y multiplicando el cociente por cada uno de estos números.*

EJEMPLO. 1.°

Tres hicieron compañía y pusieron	el 1.° 15 000 *rs.* el 2.° 20 000 » el 3.° 5 000 »	*Ganaron* 5000 *rs.*

Se quiere saber cuánto corresponde á cada uno.

El capital *social* es evidentemente 40 000 rs.; la ganancia, ó sea el número que hay que dividir, es 5000 rs., y los números á que han de ser proporcionales las partes son 15 000, 20 000 y 5000.

Luego la parte de cada uno será, segun la regla anterior,

$$\text{la del 1.°...}\ \frac{5000\times15000}{40000}=\frac{75000000}{40000}=\frac{7500}{4}=1875\ \textit{rs.}$$

$$\text{la del 2.°...}\ \frac{5000\times20000}{40000}=\frac{100000000}{40000}=\frac{10000}{4}=2500\ \textit{rs.}$$

$$\text{la del 3.°...}\ \frac{5000\times5000}{40000}=\frac{25000000}{40000}=\frac{2500}{4}=625\ \textit{rs.}$$

La suma de las partes es, como debe ser, igual á la ganancia 5000 rs.

EJEMPLO. 2.°

Tres hicieron compañía y pusieron	el 1.° 3000 *rs.* por 8 *meses.* el 2.° 2500 » por 6 » el 3.° 4000 » por 9 »	*Ganaron* 10000 *rs.*

Se quiere saber lo que corresponde á cada uno.

El número que hay que dividir es 10000, los números á que han de ser proporcionales las partes de cada uno son, segun el tercer principio, 24000, 15000 y 36000, productos de los capitales por los tiempos, y la suma de estos números es 75000; de modo que la parte de cada uno será, segun la regla dada,

$$\text{la del 1.°...}\ \frac{240000000}{75000}=\frac{240000}{75}=3200\ \textit{reales.}$$

$$\text{la del 2.°...}\ \frac{150000000}{75000}=\frac{150000}{75}=2000\ \textit{reales.}$$

$$\text{la del 3.°...}\ \frac{360000000}{75000}=\frac{360000}{75}=4800\ \textit{reales.}$$

Regla de aligacion.

393. La regla de aligacion tiene por objeto determinar el precio medio á que se debe vender la unidad de una mezcla de varias sustancias, cuyos precios son distintos; ó determinar las unidades de cada especie que se deben mezclar para poder vender la unidad de la mezcla á un precio medio determinado.

394. El precio medio á que debe venderse la unidad de una mezcla de varias sustancias de distinto precio, sabiendo las unidades mezcladas y el precio de cada una, se determina *multiplicando el valor de cada unidad por el número de las que se mezclan, sumando estos productos, y despues dividiendo la suma por el número de unidades mezcladas.*

En efecto, sean a, b, c, d ... las unidades que se mezclan, cuyos precios respectivos son p, p', p'', p''' ...; el precio de estas unidades será evidentemente

$$ap + bp' + cp'' + dp''' + \ldots$$

De modo que dividiendo el valor de la mezcla por el número de unidades que hay mezcladas, se tendrá el precio medio de la unidad de la mezcla, esto es,

$$\text{Precio medio} = \frac{ap + bp' + cp'' + dp''' + \ldots}{a + b + c + d + \ldots}.$$

Ejemplo. Mezclando 24 *fanegas de trigo* de á 60 *rs.* con 15 *fs.* de á 50 *rs.*, y con 30 *fs.* de á 46 *rs.*, *¿á cómo se debe dar la fanega de la mezcla?*

Se dispone la operacion del modo siguiente:

Precio de 24 *fs.*	á 60 *rs.*	. . .	$60 \times 24 =$	1440 *rs.*
Id. de 15 »	á 50 »	. . .	$50 \times 15 =$	750 »
Id. de 30 »	á 46 »	. . .	$46 \times 30 =$	1380 »
Id. de 69 fanegas mezcladas.		. . . . . .		3570 *rs.*

Id. de la fanega de la mezcla $\frac{3570}{69} = \frac{1190}{23} = 51$ *rs.*

395. En la resolucion del segundo problema, ó sea hallar el número de unidades de distinto precio que se han de mezclar

para que la unidad de la mezcla sea de un precio medio determinado, hay que considerar dos casos: 1.°, que sólo sean dos las especies que se han de mezclar; 2.°, que sean más de dos.

Desde luégo se comprende que esté segundo problema es indeterminado, en el caso de ser el precio medio mayor que el precio menor, y menor que el mayor; é imposible cuando el precio de la unidad de la mezcla haya de ser mayor que el mayor precio de las especies mezcladas, ó menor que el menor de dichas especies. En efecto, en el primer caso, una vez determinada una solucion, se tendrán todas las que se quieran multiplicando los números de dicha solucion por un mismo número entero ó fraccionario. En el segundo es imposible: porque si el precio máximo de las unidades que se han de mezclar es 100 reales, por ejemplo, la unidad de la mezcla nunca puede valer más de 100 reales; luego si se exige que ha de valer más, se exige un imposible.

Sin embargo, la unidad de una mezcla puede venderse á un precio mayor que el máximo de las especies mezcladas; pero entónces dicho precio no es *medio* entre los precios intrínsecos de las unidades que se mezclan, sino que el autor de la mezcla pone el precio que quiere, atendiendo á sus intereses particulares, ó al trabajo que emplea en la confeccion de dicha mezcla.

Prescindiendo de estos casos especiales, pasemos á resolver los dos que comprende el segundo problema.

Primer caso. Siendo dos las especies que se han de mezclar cuyos precios respectivos son p y p', m el precio medio comprendido entre p y p', y x é y las unidades que de cada especie se han de mezclar, se tendrá, que por cada unidad de la especie superior cuyo precio supondremos sea p, que se venda al precio medio m, habrá una pérdida igual á la diferencia de ámbos precios; es decir, de $p-m$ unidades de dinero. Al contrario, por cada unidad de la especie inferior cuyo precio es p', que se venda al precio m, se tendrá una ganancia marcada por la diferencia $m-p'$ de dichos precios; por consiguiente en x unidades de la primera especie habrá una pérdida de $x(p-m)$, y en y de la segunda, una ganancia representada por $y(m-p')$; y como entre estas dos cantidades ha de haber compensacion, se deberá tener

$$x(p-m)=y(m-p');$$

de donde se deduce

$$x=\frac{y(m-p')}{p-m}.$$

De esta fórmula se saca el valor de x correspondiente á cada valor particular que se le dé á y; de modo que dando á y el valor $p-m$ ó haciendo $y=p-m$, resulta para x el valor $m-p'$; luego tomando un número de unidades de la especie superior igual á la diferencia que hay entre el precio medio y el inferior, y un número de esta especie inferior igual exceso que hay del precio superior al precio medio, se tendrá una primera solucion. Si se quisieran otras, no habria más que multiplicar por un mismo número los hallados en esta primera solucion.

Ejemplo. *¿Cuántas fanegas de trigo de á 60 rs. y de á 47 se deben mezclar para que resulte trigo de á 54 rs.?*

Se dispondrá la operacion del modo siguiente:

PRECIO DE UNIDADES MEZCLADAS.	ID. MEDIO.	UNIDADES QUE SE DEBEN MEZCLAR.
60 *rs.*	54 *rs.*	54 — 47 = 7 *fs.* de á 60 *rs.*
47 »		60 — 54 = 6 *fs.* de á 47 »

Comprobacion.

	7 *fs.* á 60 *rs.*	importan	420 *rs.*
	6 » á 47 »	. . . . .	282 »
Fanegas mezcladas	13.	Valor de todas. . . .	702 *rs.*

Valor de la unidad de la mezcla 702 : 13 = 54 *rs.*

Segundo caso. Cuando son más de dos las especies que se han de mezclar, se van combinando de dos en dos cuyos precios comprendan el precio medio, y se obtendrán así las diferentes soluciones á que puede dar lugar este problema.

Ejemplo. *¿Cuántas fanegas de trigo de 60 rs., de 48, de 54 y de 46, se deben mezclar para obtener trigo de 50 rs.?*

Se dispondrá la operacion así:

PRECIO DE UNIDADES MEZCLADAS.	ID. MEDIO.	UNIDADES QUE SE DEBEN MEZCLAR.
60 *rs.*		50 — 48 = 2 *fs.* de á 60 *rs.*
54 »	50 *rs.*	50 — 46 = 4 » de á 54 »
48 »		60 — 50 = 10 » de á 48 »
46 »		54 — 50 = 4 » de á 46 »

Comprobacion.

2 *fs.*	á 60 *rs.*	importan	120 *rs.*
4 »	á 54 »	.....	216 »
10 »	á 48 »	.....	480 »
4 »	á 48 »	.....	184 »
Fanegas mezcladas 20.		Valor de todas....	1000 *rs.*

Valor de la unidad de la mezcla 1000 : 20 = 50 *rs.*

Se pueden hallar otras soluciones combinando las especies dadas de otro modo, ó multiplicando por un mismo número los de la solucion ya hallada.

Regla conjunta.

396. La regla conjunta ó de cambio, tiene por objeto determinar la equivalencia que hay entre las monedas de dos países, por las relaciones conocidas de estas monedas con las de otros países diferentes.

La regla conjunta está fundada en que *los productos de varias equivalencias, en las que la especie del primer miembro de cada una es la misma que la del segundo de la anterior, son tambien equivalentes; siendo el primer producto de la primera especie y el segundo de la última.*

Es decir, que si se tienen, por ejemplo, las equivalencias

$$8^a \Diamond 5^b \ (*)$$
$$3^b \Diamond 7^c$$
$$9^c \Diamond 4^d,$$

se tendrá $\quad 8 \times 3 \times 9^a \Diamond 5 \times 7 \times 4^d.$

(*) El signo $\Diamond$ que se lee ***equivalente á***, expresa que lo que hay ántes de él llamado primer miembro, es equivalente á lo que hay des-

En efecto, multiplicando la primera equivalencia por el número abstracto 3 y la segunda por 5, se tiene

$$8 \times 3^a <> 5 \times 3^b$$
$$3 \times 5^b <> 7 \times 5^c,$$

de donde se deduce $8 \times 3^a <> 7 \times 5^c$.

Multiplicando esta última por 9 y la tercera de las propuestas por 7×5, será

$$8 \times 3 \times 9^a <> 7 \times 5 \times 9^c$$
$$9 \times 7 \times 5^c <> 5 \times 7 \times 4^d,$$

de donde $8 \times 3 \times 9^a <> 5 \times 7 \times 4^d$;

y así sucesivamente se continuaria si hubiese más, por cuyo medio llegariamos á demostrar lo que se queria.

Esto supuesto, para plantear y resolver un problema de regla conjunta, se representa por x el número de monedas que se busca, y despues se establecen las relaciones conocidas, de modo, que la primera especie de cada una sea de la misma que la segunda de la relacion anterior, hasta llegar á aquella cuya última especie sea de la misma que la primera escrita; se multiplican entre sí estas equivalencias, se quitan los factores comunes que haya, y se halla el valor de la incógnita x, que expresará el resultado pedido.

Ejemplo. Suponiendo que una *libra esterlina* equivale á 25 *francos*, 5 *francos* á 19 *reales* y 20 *reales* á un *duro*, cuántos duros tendrán 347 *libras esterlinas?*

Se establecerán las relaciones del modo siguiente:

$$x \ ds. <> 347 \ lib.$$
$$1 \ lib. <> 25 \ fr.$$
$$5 \ fr. <> 19 \ rs.$$
$$20 \ rs. <> 1 \ ds.;$$

de donde se deduce que

$$x \times 1 \times 5 \times 20 <> 347 \times 25 \times 19 \times 1 \ duros,$$

pues; en el caso presente indica que 8 unidades de la especie *a* equivalen á 5 de la especie *b*.

y dividiendo por lo que multiplica á x, se tendrá

$$x = \frac{347 \times 25 \times 19}{5 \times 20} = \frac{347 \times 19}{4} = \frac{7593}{4} =$$

$$1648\ {}^{1}/_{4}\ \textit{duros},$$

ó lo que es igual 347 *libras esterlinas* equivalen á 1648 *duros* y 5 *reales*.

LECCION XLV.

Regla de falsa posicion.

Regla de falsa posicion.

397. La *regla de falsa posicion* se define diciendo que es aquella en que, tomando un número arbitrario, pero conocido, por el valor de la cantidad que se busca, y haciendo con él las operaciones indicadas en el enunciado de un problema, llegamos á obtener exacta ó aproximadamente dicha cantidad, por medio de correcciones convenientes.

La regla de falsa posicion se divide en *simple* y *doble*, segun que sean uno ó dos los números supuestos.

Se llama número supuesto aquel que se considera como el número que se busca, y el cual se somete á todas las condiciones del problema. El resultado que se obtiene no es en general el que se debia obtener; porque si lo fuese, el número que se habia supuesto seria precisamente el número que se buscaba. No siendo, como decimos, el resultado que se obtiene igual al que se debia obtener, habrá una diferencia, y á esta diferencia se le llama *error* de aquel supuesto.

Se da el nombre de *correccion* correspondiente á un supuesto dado, al número que agregado ó sustraido de dicho supuesto, nos da el número que se busca.

En todo problema se trata en general de hallar un número que cumpla con ciertas condiciones, las cuales vienen expresadas por las operaciones de la aritmética, de tal modo que el resultado de efectuar estas operaciones con los números conocidos y la incógnita de la ecuacion debe ser siempre un cierto número determinado, dando orígen así á una igualdad de la forma

$$f(x) = \text{K}, \qquad [1]$$

en la cual $f(x)$ representa la serie de operaciones á que en último resultado debe someterse el número que se busca x, y el segundo miembro K es un número conocido que expresa el resultado de las operaciones efectuadas en el primer miembro.

Segun esto, cuando en vez de x pongamos un número conocido a, y hagamos con él todas las operaciones que hariamos con el número x, si fuera conocido, llegaremos á un cierto resultado K′ que será distinto de K, de modo que se tendrá

$$f(a) = \text{K}',$$

de donde

$$f(x) - f(a) = \text{K} - \text{K}'.$$

La diferencia K — K′ expresará precisamente el *error* correspondiente al número supuesto a.

La regla de falsa posicion se funda en que *los resultados obtenidos al poner números particulares en vez de* x *en el primer miembro de la igualdad* [1], *son proporcionales á estos números.*

Este principio exacto cuando la incógnita x sólo viene elevada á la primera potencia y ligada con los datos de la cuestion por via de suma, resta, multiplicacion ó division, deja de serlo cuando viene elevada á una potencia cualquiera distinta de la unidad, ó ligada con los datos por medio de una extraccion de raices.

398. Admitiendo como cierto en todos casos este principio, podremos deducir las dos reglas siguientes:

1.ª *En la regla de falsa posicion simple el número que se busca es igual al cuarto término de la proporcion cuyos tres principios son* (f (a) = K′), K *y el número supuesto* a.

2.ª *En la regla de falsa posicion doble, el número que se busca es igual á la diferencia algebráica de los productos de cada supuesto por el error del otro, dividida por la diferencia algebráica de los errores correspondientes.*

La primera regla es exacta cuando se trata de problemas en los que la incógnita, segun hemos dicho anteriormente, sólo viene elevada á la primera potencia. En efecto, si al expresar todas las condiciones de un problema por medio de las operaciones aritméticas sólo aparece la incógnita que representaremos por x, elevada á la primera potencia, podremos reunir todos los términos que contengan esta potencia en uno solo de la forma Ax, en el cual A expresa un número cualquiera, y si representamos por K el resultado que se debe obtener cuando en vez de x se sustituya el número que se busca, obtendremos la igualdad

$$Ax = K.$$

Si ahora ponemos en vez de x dos números cualesquiera a y a' y representamos por k y k' los resultados, se tendrá

$$Aa = k \text{ y } Aa' = k',$$

de donde se deduce, dividiendo ordenadamente,

$$\frac{a}{a'} = \frac{k}{k'},$$

cuya igualdad justifica el enunciado del principio.

Pasemos á la demostracion de la segunda regla, y para ello representemos por x el número que se busca, por a y b los dos números supuestos, y por α y β los errores correspondientes; de modo que se tendrá

$$f(a) - K = \alpha, \quad f(b) - K = \beta.$$

Segun la hipótesis, se tiene

$$\frac{f(a)}{f(x)} = \frac{f(a)}{K} = \frac{a}{x} \text{ y } \frac{f(b)}{f(x)} = \frac{f(b)}{K} = \frac{b}{x},$$

y en virtud de una propiedad de las proporciones (356), se tendrá

$$\frac{f(a) - K}{K} = \frac{\alpha}{K} = \frac{a - x}{x} \text{ y } \frac{f(b) - K}{K} = \frac{\beta}{K} = \frac{b - x}{x}.$$

De estas dos relaciones se deduce

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{a-x}{b-x};$$

y de ésta se saca sucesivamente

$$\frac{\alpha}{\alpha-\beta}=\frac{a-x}{a-b},$$

$$\frac{a\alpha-b\alpha}{\alpha-\beta}=a-x,$$

$$x=a-\frac{a\alpha-b\alpha}{\alpha-\beta}=\frac{a\alpha-a\beta-a\alpha+b\alpha}{\alpha-\beta},$$

y finalmente,

$$x=\frac{b\alpha-a\beta}{\alpha-\beta},$$

segun queriamos demostrar.

De estas dos reglas nosotros sólo aplicaremos la primera en esta parte de la Aritmética, y para su completa comprension propongamos algunos ejemplos:

Problema I. *Una persona tiene impuesta la mitad de su capital al* 3 *p.* %, *la tercera parte al* 5, *y el resto al* 8; *gana en todo* 21600 *rs. al año. Se quiere saber qué capital tiene.*

Supongamos que sea el capital un número que tenga mitad y tercera parte entera, tal como 3000 rs. Impuesta la mitad al 3 p. %, produce 45; la tercera parte al 5, da 50 rs. de ganancia; y el resto, que es 3000 — (1500 + 100 rs.) = 500, impuesto al 8, produce 40 rs. Ganancia total 45 + 50 + 40 = 135; luego, segun la primera regla, se tendrá

$$\frac{x}{3000}=\frac{21600}{135};$$

de donde $$x=\frac{21600\times 3000}{135}=480\,000 \text{ rs.}$$

Comprobacion. La mitad del capital ó sea 240000 rs.

impuesto al 3 p. % da.	7200
La tercera parte 160000 al 5, dará.	8000
El resto 80000 al 8, producirá. . .	6400
Ganancia total.	21600

Resultado conforme al problema.

Problema II. *Un padre de 48 años tenia dos hijos, el uno de 16 años y el otro de 8; entre los tres hay que repartir proporcionalmente á la edad 108 naranjas; se desea saber cuántas le corresponden á cada uno.*

Si á cada uno damos tantas naranjas como años tiene, resultarán repartidas $8+16+48=72$ naranjas; lo que prueba que corresponden á cada uno más naranjas. Tambien es cierto que sabiendo lo que hay que dar á uno de ellos, al del medio por ejemplo, se sabria las que corresponden á los otros, pues el hermano menor tendria la mitad y el padre el triplo, puesto que las edades se hallan en esta relacion. Ahora bien, si suponiendo qué la parte del hijo mayor es 16, el número de naranjas es 72, para que el número de estas naranjas sea 108, ¿qué parte ha de ser la del hijo mayor? Segun el principio primero será

$$\frac{x}{16}=\frac{108}{72},\quad \text{de donde}\quad x=\frac{108\times 16}{72}=24.$$

Comprobacion.	Parte del hijo mayor.	24
	Id. del menor.	12
	Id. del padre.	72
	Número total de naranjas. . . .	108

Resultado conforme con el enunciado del problema.

Problema III. *Un platero tiene un riel de oro cuyo peso es de 12 onzas, y cuya ley es de 0,924 de fino; ¿qué cantidad de cobre debe aumentarle para que resulte á una ley de 0,80 de fino?*

Ante todo debemos observar que el peso del oro no varía y que siempre es igual á $12\times 0{,}924=11{,}088$ onzas.

Si la ley del riel fuera de 0,80, se hallaria para la cantidad de fino que contiene el riel $12\times 0{,}80=9{,}60$, cuya cantidad se diferencia de la verdadera en

$$11{,}088-9{,}60=1{,}488 \text{ onzas.}$$

Si ahora aumentamos una onza de cobre, resultará

$$13\times 0{,}80=10{,}40 \textit{ onzas},$$

cuyo número se diferencia del anterior en

$$10{,}40-9{,}6=0{,}80;$$

luego segun el principio en que se funda la regla de falsa posicion, se tendrá

$$\frac{x}{1} = \frac{1,488}{0,80} = 1,86 \text{ onzas.}$$

Comprobacion. Siendo $x = 1,86$ el número de onzas de cobre que se debe agregar para que resulte de la ley de 0,80 de fino, se tendrá que el peso del nuevo riel será de

$$12 + 1,86 = 13,86 \text{ onzas.}$$

Multiplicando este número por 0,80 para hallar el oro fino que contiene, tendremos

$$13,86 \times 0,80 = 11,088,$$

cantidad exactamente igual á la que hallamos al principio.

OCTAVA PARTE.

PROGRESIONES Y LOGARITMOS.

Progresiones.

LECCION XLVI.

Progresiones por diferencia. Expresion del término general y de la suma de los *n* primeros términos de una progresion. — Interpolar entre dos números dados, un cierto número de términos diferenciales.

Progresiones por diferencia. — Expresiones del término general y de la suma de los *n* primeros términos de una progresion.

399. *Se llama* PROGRESION ARITMÉTICA *ó* PROGRESION POR DIFERENCIA, *una serie de números tales, que cada uno excede ó es excedido del anterior en una cantidad constante que se llama* RAZON *de la progresion. Cada uno de los números de la progresion se llaman* TÉRMINOS *de la misma.*

Se dice que la progresion es *creciente*, cuando sus términos van aumentando; y *decreciente*, cuando van disminuyendo.

Las progresiones por diferencia se expresan escribiendo sus términos unos á continuacion de otros con un punto intermedio, precedidos de este signo ÷ que se lee *como*. Así, se expresará que los números 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20 están en progresion por diferencia, escribiéndolos de esta manera:

$$\div 2 . 5 . 8 . 11 . 14 . 17 . 20;$$

la cual, como se ve, es creciente, y su razon es 3.

Esta misma progresion, escrita en un órden inverso, nos dará la progresion decreciente

$$\div 20 . 17 . 14 . 11 . 8 . 5 . 2,$$

cuya razon es — 3.

De modo, que si convenimos en llamar *progresion* á una serie de números que cada uno se obtiene agregando al anterior una cantidad constante llamada *razon*, la cual puede ser positiva ó negativa, tendremos, que si la razon es positiva, los términos irán creciendo, y por tanto la progresion será creciente; y si es negativa, dichos términos irán decreciendo, y la progresion será decreciente.

400. Las progresiones por diferencia pueden ser *limitadas* ó *ilimitadas*, segun que el número de sus términos sea limitado ó ilimitado.

Los términos de una progresion limitada se representan generalmente por las letras $a, b, c, \ldots h, k, l$; la razon por r, el número de términos por n, y la suma de los mismos por S.

401. *Un término cualquiera de una progresion por diferencia limitada, es igual al primero más tantas veces la razon como términos tiene ántes de sí; ó igual al último ménos tantas veces la razon como términos hay despues de él.*

Sea la progresion $\div a \,.\, b \,.\, c. \ldots t_{m-1} \,.\, t_m \,.\, t_{m+1} \ldots h \,.\, k \,.\, l$, cuya razon positiva ó negativa es r, cuyo número de términos es n, y en la cual el término t_m suponemos que tiene $m-1$ ántes de sí, y por consiguiente despues de sí tendrá un número de términos igual á la diferencia que hay entre el número total n de términos de la progresion y el número m que hay desde el primero hasta él inclusives; es decir, $n-m$.

Esto supuesto, segun la definicion, tendremos

$$b = a + r,\ c = b + r, \ldots t_m = t_{m-1} + r$$
$$t_{m+1} = t_m + r, \ldots k = h + r,\ l = k + r, \qquad [1]$$

ó

$$b = a + r,\ c = a + 2r, \ldots t_m = a + (m-1)r$$
$$t_{m+1} = a + mr, \ldots k = a + (n-2)r,\ l = a + (n-1)r.$$

Donde vemos, que cada término es igual al primero más tantas veces la razon como número de términos le anteceden; por consiguiente, la expresion del término general es

$$t_m = a + (m-1)r \qquad [2].$$

De las igualdades [1] se deducen estas otras:

$$k = l - r,\ h = k - r, \ldots t_m = t_{m+1} - r$$
$$t_{m-1} = t_m - r, \ldots b = c - r,\ a = b - r,$$

$$k = l - r,\ h = l - 2r, \ldots\ t_m = l - (n - m)r$$
ó
$$t_{m-1} = l - (n - m + 1)r, \ldots b = l - (n - 2)r, a = l - (n - 1)r,$$

de las cuales se saca la expresion

$$t_m = l - (n - m)r, \qquad [3]$$

que justifica lo segundo que se queria demostrar; es decir, que un término cualquiera de una progresion por diferencia, es igual al último ménos tantas veces la razon como número de términos hay despues de él.

402. Las locuciones *más tantas veces* y *ménos tantas veces la razon como términos*, etc., deben entenderse algebráicamente; pues habiendo convenido en que la razon r puede ser positiva ó negativa, no lleva la primera envuelta la idea de aumento y la segunda de disminucion, como podria creerse, sino que al decir *más tantas veces la razon*, se tendrá presente que, segun ésta sea positiva ó negativa, así la progresion será creciente ó decreciente; ó lo que es lo mismo, la razon se deberá aumentar ó disminuir *aritméticamente* al término anterior el número de veces que se indica.

Para poner de manifiesto el resultado de la operacion aritmética que se practica, es menester poner tambien de manifiesto el signo que la razon r tenga en las expresiones del término general. Así, dichas expresiones se convertirán en

$$t_m = a \pm (m - 1)r \quad \text{y} \quad t_m = l \mp (n - m)r, \qquad [4]$$

las cuales se consideran con los signos superiores, si la progresion es creciente; y con los inferiores, si es decreciente.

403. *En toda progresion por diferencia limitada, la suma de dos términos equidistantes de los extremos, es constante é igual á la suma de estos extremos.*

Sea la progresion limitada

$$\div\, a \,.\, b \,.\, c \ldots t_m \ldots t'_m \ldots h \,.\, k \,.\, l,$$

cuya razon es r. Sean, ademas, t_m y t'_m dos términos de la progresion, que tienen el uno m términos antes de sí, y el otro el mismo número m de términos despues de sí, y por consiguiente ámbos equidistantes de los extremos a y l.

Segun las expresiones [4], se tienen las igualdades

$$t_m = a \pm (m-1)r \quad \text{y} \quad t'_m = l \mp (m-1)r,$$

que sumadas nos dan la siguiente:

$$t_m + t'_m = a + l,$$

que prueba lo que se queria demostrar.

404. *La suma de los* n *términos de una progresion por diferencia, es igual á la mitad de la suma de los extremos multiplicada por el número de términos.*

Sea la progresion $\div a . b . c \ldots h . k . l$, cuyo número de términos representaremos, como ya se ha dicho, por n, y la suma por S, de modo que se tendrá

$$S = a + b + c + \ldots + h + k + l;$$

escribiendo los sumandos en un órden inverso, lo cual no altera la suma, se obtiene

$$S = l + k + h + \ldots + c + b + a;$$

y sumando estas igualdades término á término, tendremos

$$2S = (a+l) + (b+k) + (c+h) + \ldots + (k+b) + (l+a).$$

Cada uno de los n paréntesis que hay en el segundo miembro, indica la suma de los extremos ó de dos términos equidistantes de los extremos; y como todas estas sumas son iguales (403), se tendrá

$$2S = (a+l)\,n, \quad \text{de donde} \quad S = \frac{(a+l)\,n}{2}, \quad [5]$$

que es lo que se queria demostrar.

405. En las progresiones por diferencia, la expresion del término general que se considera, no es la de un término cualquiera [2], sino la del último, que generalmente se representa por l; así, las expresiones del término general y de la suma de los n términos de una progresion limitada, son

$$l = a + (n-1)\,r \quad [6] \qquad \text{y} \qquad S = \frac{(a+l)\,n}{2} \quad [7].$$

Ejemplo I. *Hallar el término del lugar* 32 *en la progresion cuyo primer término es* 4, *y cuya razon es* 7.

Aplicando la fórmula [6], se halla

$$l = t_{32} = 4 + 31 \times 7 = 4 + 217 = 221.$$

Ejemplo II. *Hallar el término del lugar* 8 *en una progresion cuyo último término es* 124, *el número total de términos es* 20, *y la razon* 5.

Puesto que el número de términos que tiene la progresion es 20, y el que vamos buscando ocupa el lugar 8, el número de términos que tendrá despues de sí serán $20 - 8 = 12$; y por tanto, segun la fórmula [4], se hallará

$$t_8 = 124 - 12 \times 5 = 124 - 60 = 64.$$

Ejemplo III. *Hallar la suma de los términos de la progresion cuyo primer término es* 8, *el número de términos* 20, *y la razon* 4.

Por la fórmula [6] hallaremos el último término, que será $l = 8 + 19 \times 4 = 84$, y por la [7] deduciremos el valor de la suma

$$S = \frac{(8 + 84)\,20}{2} = 92 \times 10 = 920.$$

Ejemplo IV. *Hallar la suma de los* n *primeros números enteros* 1, 2, 3 ... n.

Esta son los términos de una progresion por diferencia, cuyo primer término es 1, la razon 1, el número de términos n, y el último n tambien; de modo que se tendrá

$$S = \frac{(1 + n)\,n}{2} = \frac{n^2 + n}{2}.$$

Ejemplo V. *Hallar la suma de los* n *primeros números impares y de los* n *primeros números pares, á partir del* 2.

Para la primera fórmula hallaremos

$S = \frac{2n \times n}{2} = n^2$; y para la segunda $S = \frac{(2 + 2n)\,n}{2} = n^2 + n$.

406. La primera fórmula nos demuestra la notable propiedad que la suma de un número n de números impares consecuti-

vos es igual al cuadrado del mismo número n. De esta propiedad se deduce el medio de resolver el problema de *hallar dos cuadrados cuya suma sea tambien un cuadrado.*

En efecto, si en la serie natural de los números impares nos detenemos en uno que sea un cuadrado perfecto, este número y la suma de todos los números impares que le preceden, que será tambien por lo dicho anteriormente un cuadrado perfecto, nos dará una suma igual á la de todos los números impares considerados, que será un cuadrado. Así, considerando la serie de los números impares

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\ \ldots\ 2n-3,\ 2n-1\ \ldots$$

y suponiendo que el término $2n-1$, que ocupa el lugar n, sea un cuadrado perfecto, se tendrá $2n-1=a^2$, la suma de los $n-1$ términos anteriores será igual, segun lo dicho arriba, á $(n-1)^2$, y la suma de los n números impares vendrá dada por la expresion

$$n^2=(2n-1=a^2)+(n-1)^2;$$

luego la suma de los dos cuadrados a^2 y $(n-1)^2$ forman otro cuadrado n^2, segun queriamos demostrar.

Interpolar entre dos números dados un cierto número de términos diferenciales.

407. Interpolar entre dos números dados a y l un cierto número m de términos diferenciales, es formar una progresion por diferencia cuyo primer término sea a, el último l, y el número total de términos $m+2$, de los cuales los m intermedios se llaman *medios diferenciales.*

Como en esta progresion se conoce el primer término a, el último l, y el número de términos $n=m+2$, podremos deducir de la fórmula [6] el valor de la razon r, que será

$$r=\frac{l-a}{m+1},$$

cuya fórmula nos prueba, *que la razon de la progresion que tratamos de formar, es igual á la diferencia de los dos números dados dividida por el número de medios que se quieren interpolar, más uno.*

Conocida la razon r, la progresion pedida será

$$\div a \,.\, a+r \,.\, a+2r \ldots a+mr \,.\, l.$$

Ejemplo. *Interpolar 12 medios diferenciales entre los dos números 1 y 40.*

Segun la fórmula anterior, hallaremos $r=\frac{40-1}{12+1}=\frac{39}{13}=3$; luego la progresion pedida será

$$\div 1 \,.\, 4 \,.\, 7 \,.\, 10 \,.\, 13 \,.\, 16 \,.\, 19 \,.\, 22 \,.\, 25 \,.\, 28 \,.\, 31 \,.\, 34 \,.\, 37 \,.\, 40.$$

408. *Si se interpolan entre los términos de una progresion por diferencia un mismo número de medios diferenciales, se obtiene una sola progresion, cuya razon es igual al cociente de dividir la razon primitiva por el número de medios más uno, que se interpolan entre cada dos.*

Sea la progresion $\div a \,.\, b \,.\, c \,.\, d \,.\, e \ldots k \,.\, l$, cuya razon es

$$b-a=c-b=d-c=e-d \ldots = l-k=r.$$

Las razones de las diversas progresiones parciales que se obtienen interpolando entre los términos a y b, b y c, c y d, etc. un mismo número m de medios diferenciales, son (407)

$$\frac{b-a}{m+1}, \quad \frac{c-b}{m+1}, \quad \frac{d-c}{m+1}, \quad \frac{e-d}{m+1} \ldots$$

las cuales son todas iguales á $\frac{r}{m+1}$, puesto que todas tienen un mismo denominador, y los numeradores son iguales á r. Ademas, como el último término de cada una es el primero de la siguiente, se sigue que podremos considerar á todas ellas como una sola progresion, cuya razon es $\frac{r}{m+1}$.

409. *Para interpolar entre dos números dados un número de medios diferenciales igual á* $pp'p'' \ldots -1$, *se interpolan primero* $p-1$ *medios diferenciales entre los dos números dados; luégo* $p'-1$ *entre cada dos términos de la progresion que resulte; despues* $p''-1$, *y así sucesivamente.*

Para demostrar esta regla, consideraremos dos casos: primero, que el número de medios diferenciales que queremos interpolar entre los dos números a y l, sea $pp' - 1$; y segundo, que sea igual á $pp'p'' \ldots - 1$; es decir, que sólo contenga la primera parte dos factores, ó que contenga más de dos.

Primer caso. Sea $pp' - 1$ el número de medios que queremos interpolar entre los dos números a y l.

La razon de la progresion que resulta de interpolar $pp' - 1$ medios diferenciales entre los dos números a y l, es (107)

$$r = \frac{l - a}{pp'};$$

pero si hacemos $r' = \dfrac{l - a}{p}$, el valor de r se convierte en

$$r = \frac{r'}{p'}.$$

Ahora bien, r' es la razon de la progresion que resulta de interpolar $p - 1$ medios diferenciales entre a y l, y r es la razon de la segunda progresion que resulta de interpolar $p' - 1$ medios entre cada dos términos de la primera; luego la razon r, que es lo que se necesita conocer para interpolar entre los dos números a y l un número $pp' - 1$ de términos diferenciales, se puede hallar, segun la regla, interpolando primero $p - 1$ medios entre a y l, y luégo $p' - 1$ medios entre cada dos términos de la progresion que resulte.

Segundo caso. Sea $pp'p''p''' \ldots - 1$ el número de medios diferenciales que se quiere interpolar entre los dos números a y l. Si representamos por P_1 el producto $p'p''p''' \ldots$, se tendrá para número de medios que se han de interpolar la expresion $pP_1 - 1$, y segun el primer caso, la razon de la progresion que resulte, se hallará interpolando primero $p - 1$ medios entre a y l, y luégo $P_1 - 1$ entre cada dos términos de la progresion que resulte. Mas para interpolar $P_1 - 1$ medios entre cada dos términos de esta progresion, segun el mismo primer caso, y haciendo $P_2 = p''p''' \ldots$, tendremos que interpolar primero $p' - 1$ medios, y luégo $P_2 - 1$ entre cada dos términos de la nueva progresion que resulte, y así sucesivamente, lo cual viene á justificar la regla dada.

410. Como caso particular del anterior, consideraremos aquel en el que el número de medios diferenciales que entre dos números a y l se quieren interpolar, sea de la forma $p^n - 1$, lo cual se conseguirá interpolando $p - 1$ medios entre los dos números dados, y cada dos términos de las progresiones que sucesivamente se van obteniendo.

Así, para interpolar entre a y l un número de medios diferenciales igual á $2^n - 1$, se interpolará primero entre a y l un medio diferencial; luégo un medio diferencial entre cada dos términos de la progresion hallada; despues otro medio diferencial entre cada dos términos de la nueva progresion, y así sucesivamente, hasta haber repetido esta operacion n veces.

411. Recíprocamente, *si entre dos números se interpolan primero* p — 1 *medios diferenciales; luégo* p′ — 1 *entre cada dos términos de la progresion que resulta; despues* p″ — 1 *entre cada dos términos de la progresion que nuevamente se obtiene, y así sucesivamente, equivale á haber interpolado de una vez entre los dos números dados un número* pp′p″p‴ ... — 1 *de términos diferenciales.*

En efecto, sean r, r', r'', r''' ... las razones que sucesivamente se van obteniendo en cada una de las progresiones que se tienen; la última, que podremos representar por r_1, vamos á demostrar que es la misma que se hallaria si desde luégo hubiéramos interpolado entre los dos números dados, un número de medios diferenciales igual á $pp'p''p''' \ldots - 1$.

Segun lo demostrado ya (407), se tiene, llamando a y l á los números dados,

$$r = \frac{b-a}{p},\ r' = \frac{r}{p'},\ r'' = \frac{r'}{p''},\ r''' = \frac{r''}{p'''} \ldots,$$

ó lo que es lo mismo

$$r = \frac{b-a}{p},\ r' = \frac{b-a}{p} : p' = \frac{b-a}{pp'},\ r'' = \frac{b-a}{pp'} : p'' = \frac{b-a}{pp'p''}, \ldots$$

luego la expresion de la última razon, será $r_1 = \dfrac{b-a}{pp'p''p''' \ldots}$; pero si interpolamos entre los dos números dados a y l, un número de medios igual á $pp'p''p''' \ldots - 1$ se halla para valor de la razon R de la progresion que resulta, la expresion $R = \frac{b-a}{pp'p''p''' \ldots}$. Luego vemos que las dos razones R y r_1 son iguales, y por tanto las progresiones obtenidas por ámbos medios son iguales tambien, segun queriamos demostrar.

LECCION XLVII.

Progresiones por cociente. Expresiones del término general, del producto de los *n* primeros términos de una progresion y de su suma. — Interpolar entre dos números dados, un cierto número de términos proporcionales. — Progresiones geométricas decrecientes prolongadas indefinidamente; limite de la suma de todos sus términos.

Progresiones por cociente. Expresion del término general, del producto de los *n* primeros términos de una progresion y de su suma.

412. *Se llama* PROGRESION GEOMÉTRICA *ó* POR COCIENTE, *una serie de números tales que cada uno es igual al anterior multiplicado por una cantidad constante llamada* RAZON *de la progresion.*

Si la razon es mayor que la unidad, los términos de la progresion irán aumentando, por cuya razon se dice que dicha progresion es *creciente;* si la razon es menor que la unidad, los términos van decreciendo y la progresion será *decreciente.*

Las progresiones por cociente, se expresan escribiendo sus términos unos á continuacion de otros con dos puntos intermedios precedidos de este signo $\div\!\div$ que se lee *como*. Así, se expresará que los números 2, 4, 8, 16, 32, 64 y 128, están en progresion por cociente, escribiéndolos de esta manera:

$$\div\!\div\, 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128,$$

la cual como se ve es creciente y su razon es 2.

Esta misma progresion escrita en un órden inverso, nos daria una progresion decreciente, cuya razon seria $\frac{1}{2}$.

413. Las progresiones por cociente pueden ser *limitadas* ó

ilimitadas, segun que el número de sus términos sea limitado ó ilimitado.

Los términos de una progresion geométrica limitada se representan generalmente por las letras a, b, c ... h, k, l; la razon por q; el número de términos por n, y la suma por S.

414. *Un término cualquiera de una progresion por cociente limitada es igual al primero multiplicado por una potencia de la razon, cuyo exponente es igual al número de términos que le anteceden, ó igual al último dividido por una potencia de la razon, cuyo exponente es el número de términos que le siguen.*

Sea la progresion $\div a : b : c : \ldots : t_{m-1} : t_m : t_{m+1} : \ldots : h : k : l$, cuya razon, mayor ó menor que la unidad, representaremos por q, el número de términos por n, y en la cual el término t_m suponemos que tiene $m - 1$ términos ántes de sí, y por consiguiente el de los términos que le siguen será $n - m$.

Esto supuesto, tendremos, segun la definicion

$$\begin{array}{l} b = a \times q,\ c = b \times q \ldots t_m = t_{m-1} \times q, \\ t_{m+1} = t_m \times q \ldots k = h \times q,\ l = k \times q, \end{array}$$

ó

$$\begin{array}{l} b = a \times q,\ c = a \times q^2 \ldots t_m = a \times q^{m-1}, \\ t_{m+1} = a \times q^m \ldots k = a \times q^{n-2},\ l = a \times q^{n-1} \end{array} \qquad [1].$$

Donde vemos que cada término es igual al primero multiplicado por una potencia de la razon cuyo exponente es igual al número de términos que le preceden. Por consiguiente, la expresion del término general es

$$t_m = a \times q^{m-1} \qquad [2].$$

De las igualdades [1], se deducen estas otras:

$$k = \frac{l}{q},\ h = \frac{k}{q} \ldots t_m = \frac{t_{m+1}}{q},$$

$$t_{m-1} = \frac{t_m}{q} \ldots b = \frac{c}{q},\ a = \frac{b}{q},$$

ó

$$k = \frac{l}{q},\ h = \frac{l}{q^2} \ldots t_m = \frac{l}{q^{n-m}},$$

$$t_{m-1} = \frac{l}{q^{n-m+1}} \ldots b = \frac{l}{q^{n-2}},\ a = \frac{l}{q^{n-1}},$$

de donde $$t_m = \frac{l}{q^{n-m}}, \qquad [3]$$

expresion que justifica lo segundo que se queria demostrar.

415. *En toda progresion por cociente limitada, el producto de dos términos equidistantes de los extremos es constante é igual al producto de estos extremos.*

Sea la progresion $\div\!\div\, a : b : c : \ldots : t_m : \ldots : t'_m : \ldots : h : k : l$, cuya razon es q. Sean, ademas, t_m y t'_m dos términos de la progresion que tienen, el uno m términos ántes de sí, y el otro el mismo número de términos despues de sí, y por consiguiente están equidistantes de los extremos a y l.

Segun las expresiones [2] y [3], se tienen las igualdades

$$t_m = a \times q^m \quad \text{y} \quad t'_m = \frac{l}{q^m},$$

que multiplicadas miembro á miembro, nos dan

$$t_m \times t'_m = a \times q^m \times \frac{l}{q^m} = a \times l,$$

que prueba lo que se queria demostrar.

416. *El producto de los* n *términos de una progresion por cociente, es igual á la raiz cuadrada de la enésima potencia del producto de los extremos.*

Sea la progresion $\div\!\div\, a : b : c : \ldots : h : k : l$.

Representemos por P el producto de sus términos y se tendrá $P = a \times b \times c \times \ldots \times h \times k \times l$ ó $P = l \times k \times h \times \ldots \times c \times b \times a$, de donde deduciremos $P^2 = al \times bk \times ch \times \ldots \times hc \times kc \times la$, y como cada uno de los n factores del segundo miembro es el producto de dos términos equidistantes de los extremos, se tendrá (415), $P^2 = al \times al \times al \ldots = (al)^n$, y extrayendo la raiz cuadrada, hallaremos, segun queriamos demostrar,

$$P = \sqrt{(a \times l)^n} \qquad [4].$$

417. *La suma de los* n *términos de una progresion por cociente, es igual á la diferencia entre el primer término y el último multiplicado por la razon, partida por la diferencia que hay entre la unidad y la razon.*

Sea la progresion por cociente $\div\div a : b : c : \ldots : h : k : l$, representemos por S la suma de sus n términos, y se tendrá

$$S = a + b + c + \ldots + h + k + l,$$

que multiplicada por la razon q, y observando que cada término multiplicado por la razon nos da el siguiente, tendremos

$$Sq = b + c + \ldots + h + k + l + lq.$$

Restando ahora de la primera la segunda si $q < 1$, ó de la segunda la primera si $q > 1$, hallaremos

$$S - Sq = a - lq, \text{ de donde } S = \frac{a - lq}{1 - q}, \qquad [5]$$

ó $$Sq - S = lq - a, \text{ de donde } S = \frac{lq - a}{q - 1} \qquad [6].$$

La expresion de la suma se convierte en

$$[7] \qquad S = \frac{a - aq^n}{1 - q} \quad \text{ó} \quad S = \frac{aq^n - a}{q - 1}, \qquad [8]$$

poniendo en las expresiones [5] y [6] en vez del último término l, su igual aq^{n-1}.

Estas expresiones toman la forma indeterminada $\frac{0}{0}$ cuando $q = 1$; pero se puede hallar el verdadero valor de la suma, que en este caso es an, dividiendo sus dos términos por el factor comun $1 - q$, ó $q - 1$, y haciendo despues $q = 1$.

418. La expresion del término general que en las progresiones por cociente se considera, no es la de un término cualquiera, sino la del último: así tendremos

$$l = a \times q^{n-1} \qquad [9].$$

Interpolar entre dos números dados un cierto número de términos proporcionales.

419. Interpolar entre dos números dados a y l un cierto número m de términos proporcionales, es formar una progresion por cociente cuyo primer término sea a, el último l, y el número total de términos $m + 2$, de los cuales los m intermedios se llaman *medios proporcionales*.

Como en esta progresion conocemos el primer término a, el último l, y el número de términos $n = m + 2$, podremos deducir de la fórmula [9] el valor de la razon q, que será

$$q = \sqrt[m+1]{\frac{l}{a}}, \qquad [10]$$

lo cual nos prueba que la razon de la progresion que tratamos de formar, *es igual á la raiz cuyo índice es el número de medios que se quiere interpolar más uno, del cociente que resulta de dividir el último término por el primero.*

Conocida la razon q, la progresion pedida será

$$\div\, a : aq : aq^2 : aq^3 : \ldots\, aq^m : l.$$

420. *Si se interpolan entre los términos de una progresion por cociente un mismo número de medios proporcionales, se obtiene una sola progresion cuya razon es igual á la raiz de la razon primitiva, cuyo índice es el número de medios que se interpolan más uno.*

Sea la progresion $\div\, a : b : c : d : e : \ldots : k : l$, cuya razon es $\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{d}{c} = \frac{e}{d} = \ldots = q$.

Las razones de las diversas progresiones que se obtienen interpolando entre los términos a y b, b y c, etc. un mismo número m de medios proporcionales, son [10]

$$\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}},\quad \sqrt[m+1]{\frac{c}{b}},\quad \sqrt[m+1]{\frac{d}{c}},\quad \sqrt[m+1]{\frac{e}{d}} \ldots,$$

las cuales son todas iguales á $\sqrt[m+1]{q}$.

Ademas, como el último término de cada una es el primero de la siguiente, se sigue que podremos considerar á todas ellas como una sola progresion cuya razon es $\sqrt[m+1]{q}$.

421. *Se puede interpolar entre cada dos términos de una progresion geométrica un número de medios proporcionales tal, que la diferencia de dos términos consecutivos de la progresion resultante sea tan pequeña como se quiera.*

En efecto, sea q la razon de la progresion dada, y $n - 1$ el número de términos que se interpolan. La razon de la nueva progresion será $\sqrt[n]{q}$; por consiguiente, dos términos consecutivos de esta nueva progresion serán $a\left(\sqrt[n]{q}\right)^m$ y $a\left(\sqrt[n]{q}\right)^{m+1}$, y su diferencia será

$$a\left(\sqrt[n]{q}\right)^{m+1} - a\left(\sqrt[n]{q}\right)^{m} = a\left(\sqrt{q}\right)\ \left(\sqrt[n]{q}-1\right).$$

Pero hemos visto (313) que siendo n suficientemente grande, $\sqrt[n]{q}-1$ puede ser menor que cualquiera cantidad δ por pequeña que sea; luego este factor tiende hácia cero á medida que n aumenta. El otro factor $a\left(\sqrt[n]{q}\right)^m$, tiende á valer a; luego el producto que expresa la diferencia entre dos términos consecutivos puede ser tan pequeño como queramos, que es lo que se trataba de demostrar.

422. *Para interpolar entre dos números dados un número de medios proporcionales igual á* $pp'p'' \ldots - 1$, *se interpolan primero* $p-1$ *medios proporcionales entre los dos números dados, luégo* $p'-1$ *entre cada dos términos de la progresion que resulte, despues* $p''-1$ *entre cada dos de esta última, y así sucesivamente.*

Para demostrar esta regla consideraremos dos casos: primero, que el número de medios proporcionales que se quiera interpolar entre dos números dados a y l sea $pp'-1$; y segundo, que dicho número de medios sea igual á $pp'p'' \ldots - 1$; es decir, que sólo contenga la primera parte dos factores, ó que contenga más de dos.

Primer caso. Sea $pp'-1$ el número de medios proporcionales que queremos interpolar entre los dos números a y l.

La razon de la progresion que resulta de interpolar $pp'-1$ medios proporcionales entre a y l, es (419)

$$q = \sqrt[pp']{\frac{l}{a}};$$

pero si hacemos $q' = \sqrt[p]{\frac{l}{a}}$, el valor de q', se convierte en

$$q = \sqrt[p']{q'}.$$

Ahora bien, q' es la razon de la progresion que resulta de interpolar $p-1$ medios proporcionales entre a y l, y q es la razon de la segunda progresion que resulta de interpolar $p'-1$ medios entre cada dos términos de la primera; luego la razon q, que es la que se necesita conocer para interpolar entre los dos números a y l, un número $pp'-1$ de términos proporcionales, se puede hallar, segun la regla, interpolando primero $p-1$ medios entre a y l, y luégo $p'-1$ entre cada dos términos de la progresion que resulta.

SEGUNDO CASO. Sea $pp'p''p'''\ldots-1$ el número de medios proporcionales que queremos interpolar entre los dos números a y l. Si representamos por P_1 el producto de $p'p''p'''\ldots$ se tendrá para número de medios que se han de interpolar, la expresion pP_1-1, y segun el primer caso la razon de la progresion que resulte, se hallará interpolando primero $p-1$ medios entre a y l, y luégo P_1-1 entre cada dos términos de la progresion que resulte. Mas para interpolar P_1-1 medios entre cada dos términos de la progresion, segun el mismo primer caso, y haciendo $P_2=p''p'''\ldots$, tendremos que interpolar primero $p'-1$ medios, y luégo $P_2=1$ entre cada dos términos de la nueva progresion que se obtiene, y así sucesivamente, lo cual justifica la regla dada.

423. Como caso particular del anterior, consideraremos aquel en el cual el número de medios proporcionales que entre dos números a y l queramos interpolar sea de la forma p^n-1, lo cual se consigue interpolando $p-1$ medios entre los números dados, y entre cada dos términos de las progresiones que sucesivamente se vayan obteniendo. Así, para interpolar entre a y l un número de medios proporcionales igual á 2^n-1, se interpolará, primero un medio proporcional entre a y l, luégo otro entre cada dos de los términos que resulten, despues otro medio entre cada dos términos de la progresion última, y así sucesivamente hasta haber repetido esta operacion n veces.

424. Recíprocamente, *si entre cada dos números se interpolan, primero* p $-$ 1 *medios proporcionales, luégo* p$'$ $-$ 1 *entre cada dos términos de la progresion que resulta, despues* p$''$ $-$ 1 *entre cada dos términos de la progresion que nuevamente se obtiene, y así sucesivamente, equivale á haber interpolado de una*

vez entre los dos números dados, un número $pp'p''p''' \ldots - 1$ *de términos proporcionales.*

En efecto, sean q, q', q'', q''' ... las razones que sucesivamente se van obteniendo en cada una de las progresiones que resultan; la última, que podremos representar por q_1, vamos á demostrar que es la misma que se hallaria si desde luégo hubiéramos interpolado entre los dos números dados un número de medios proporcionales igual á $pp'p''p''' \ldots - 1$.

Segun lo demostrado anteriormente, se tiene, llamando a y l á los dos números dados,

$$q = \sqrt[p]{\frac{l}{a}},\ q' = \sqrt[p']{q},\ q'' = \sqrt[p'']{q'} \ \ldots,$$

ó lo que es lo mismo, llamando Q al cociente de l por a,

$$q = \sqrt[p]{Q},\ q' = \sqrt[p']{\sqrt[p]{Q}} = \sqrt[pp']{Q},$$

$$q'' = \sqrt[p'']{\sqrt[p']{\sqrt[p]{Q}}} = \sqrt[pp'p'']{Q} \ \ldots;$$

luego la expresion de la última razon, será $Q_1 = \sqrt[pp'p''\ldots]{\frac{l}{a}}$;

pero interpolando entre los dos números dados a y l, un número de medios proporcionales igual á $pp'p'' \ldots - 1$, se halla para valor de la razon Q'_1 de la progresion que resulta,

$$Q'_1 = \sqrt[pp'p''\ldots]{\frac{l}{a}};$$

luego vemos, que las dos razones Q_1 y Q'_1 son iguales, y por tanto las progresiones obtenidas finalmente por ámbos medios son iguales tambien, segun queriamos demostrar.

Progresiones geométricas decrecientes prolongadas indefinidamente; límite de la suma de todos sus términos.

425. Las progresiones geométricas decrecientes prolongadas al infinito, son aquellas cuya razon q es menor que la unidad, y el número n de sus términos crece indefinidamente.

La fórmula [7], que nos da el valor de la suma de los términos de una progresion decreciente en funcion del primer término, la razon y el número de términos, se puede poner bajo la forma $S=\frac{a}{1-q}-\frac{a}{1-q}\times q^n$.

Si ahora suponemos que n aumenta indefinidamente, el minuendo $\frac{a}{1-q}$ no varía por ser independiente de n; pero el sustraendo $\frac{a}{1-q}\times q^n$ decrece indefinidamente, por componerse de un factor constante $\frac{a}{1-q}$, y de otro q^n que puede ser menor que cualquiera cantidad dada, por pequeña que sea (272). Por lo tanto, la diferencia de estas dos expresiones tiende á valer $\frac{a}{1-q}$ á medida que n aumenta; luego la suma de los términos de la progresion, que equivale á esta diferencia, tiende á valer $\frac{a}{1-q}$ cuando n aumenta, y puede diferenciarse de esta cantidad en tan poco como se quiera; luego si representamos por S′ el límite de la suma de los términos de la progresion, se tendrá

$$S'=\frac{a}{1-q} \qquad [11].$$

Si tomamos por el valor de la suma de todos los términos de una progresion decreciente la de sus n términos primeros, siendo n un número finito, el error, que podremos representar por E, vendrá expresado por la fórmula

$$E=\frac{a}{1-q}\times q^n, \qquad [12]$$

el cual será tanto más pequeño, cuanto mayor sea n.

426. PROBLEMA. *Determinar la condicion para que tres números* a, b, c *sean términos de una progresion.*

Si suponemos que la progresion principia en el término a, que de a á b hay m términos, que del término a al término c hay n, y que la razon sea q, tendremos

$$b=aq^m, \quad c=aq^n;$$

de donde $$q=\sqrt[m]{\frac{b}{a}},\quad q=\sqrt[n]{\frac{c}{a}};$$

y por tanto

$$\sqrt[m]{\frac{b}{a}}=\sqrt[n]{\frac{c}{a}} \quad \text{ó} \quad \left(\frac{b}{a}\right)^n=\left(\frac{c}{a}\right)^m.$$

Si a, b, c son conmensurables, reduciendo las fracciones $\frac{b}{a}$ y $\frac{c}{a}$ á su más simple expresion, y representando por $\frac{h}{h'}$ y $\frac{k}{k'}$ las fracciones irreducibles equivalentes, tendremos

$$\left(\frac{h}{h'}\right)^n=\left(\frac{k}{k'}\right)^m \quad \text{ó} \quad \frac{h^n}{h'^n}=\frac{k^m}{k'^m}.$$

Siendo irreducibles estas dos fracciones, se deberá tener

$$h^n=k^m \quad \text{y} \quad h'^n=k'^m;$$

lo que exige que h y k se formen de los mismos factores primos, y éstos elevados á potencias cuyos exponentes estén en una relacion constante $\frac{m}{n}$; lo mismo respecto de h' y k'.

Ahora bien, siendo la relacion $\frac{m}{n}$ indeterminada, los números a, b, c pueden formar parte de una infinidad de progresiones.

427. Una fraccion decimal periódica puede considerarse como una progresion geométrica prolongada indefinidamente; y por tanto, para hallar la fraccion ordinaria generatriz, que no es otra cosa que el límite de la suma de todos sus términos, podrá aplicarse la fórmula [11].

Sea la fraccion decimal periódica 0,636363 ..., la cual se puede poner bajo la forma

$$\frac{63}{100}+\frac{63}{100}\cdot\frac{1}{100}+\frac{63}{100}\cdot\left(\frac{1}{100}\right)^2+\ldots,$$

que no es otra cosa que la suma de los términos de una progresion geométrica decreciente y prolongada al infinito, cuyo primer término es $\frac{63}{100}$, y la razon $\frac{1}{100}$; por tanto, la expresion de la suma será, segun la fórmula [11],

$$S' = \frac{\frac{63}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{63}{100 - 1} = \frac{63}{99},$$

lo cual está conforme con lo dicho en la leccion XXI, número 212.

Logaritmos.

LECCION XLVIII.

Definicion de los logaritmos. — Propiedades fundamentales de los logaritmos.

Definicion de los logaritmos.

428. Si consideramos dos progresiones, la una por cociente cuyo primer término es la unidad, la otra por diferencia que tiene cero por primer término, y que se correspondan mutuamente término á término, se dice que los términos de la segunda son los *logaritmos* de los números que forman los términos correspondientes de la primera.

Sean la progresiones

$$\begin{array}{l} \div\!\!\div\ 1 : q : q^2 : q^3 : \ldots : q^n : \ldots \\ \div\ 0 \,.\, r \,.\, 2r \,.\, 3r \,.\, \ldots \,.\, nr \,.\, \ldots \end{array} \qquad [1];$$

un término cualquiera nr de la segunda progresion será el logaritmo del término q^n correspondiente en la primera.

429. De esta definicion de logaritmos se deduce que un sistema cualquiera de números puede corresponder á una infinidad de sistemas de logaritmos, ó lo que es lo mismo, que un mismo número puede tener una infinidad de logaritmos, ó que un logaritmo puede corresponder á una infinidad de números.

En efecto, como las dos progresiones que se consideran siendo los términos de la una los logaritmos de los términos correspondientes de la otra, no tienen que satisfacer á más condicion que á la de principiar la una por *cero* y la otra por la *unidad*, una vez escrita una de ellas, la primera por ejemplo,

$$\div\!\div 1 : q : q^2 : q^3 : \ldots : q^n : \ldots,$$

podremos escribir de la segunda especie cuantas queramos, y cada uno de los términos de éstas serán los logaritmos del término correspondiente de la primera. Así, si consideramos varias progresiones por diferencia

$$\div 0 \,.\, r \,.\, 2r \,.\, 3r \ldots . nr \ldots,$$
$$\div 0 \,.\, r' \,.\, 2r' \,.\, 3r' \ldots . nr' \ldots,$$
$$\div 0 \,.\, r'' \,.\, 2r'' \,.\, 3r'' \ldots . nr'' \ldots,$$

que principien por cero, hallaremos que el número q^n tiene por logaritmo nr, nr', nr'' ...

Si, por el contrario, hubiéramos considerado una progresion por diferencia que principiase por *cero* y varias progresiones por cociente cuyos primeros términos fuesen la *unidad*, cada uno de los términos de la primera hubiera sido el logaritmo de los términos correspondientes en las demas progresiones.

Por esta razon, cuando se habla del logaritmo de un número es menester fijar el sistema de progresiones que se considera, lo cual viene á determinar por sí lo que se llama *un sistema de logaritmos*.

Cualquiera que sea el sistema de logaritmos, el logaritmo de la *unidad* es siempre *cero*.

430. De la definicion anterior de los logaritmos se deduce tambien, que una vez elegidas las dos progresiones que constituyen un sistema, sólo tienen logaritmos los números mayores que la unidad, si las progresiones, como generalmente se eligen, son crecientes, y de éstas sólo aquellos números que forman los términos de la progresion por cociente. Si las progresiones son decrecientes, entónces sólo parece tener logaritmos los números menores que la unidad que forman los términos de la progresion por cociente; ya veremos cómo esta definicion se hace extensible á cualquier número positivo, ora sea mayor ó menor que la unidad, ora sea ó no uno de los términos de la progresion por cociente.

431. En primer lugar, si nosotros consideramos el siste-

ma [1] de las dos progresiones que suponemos ser crecientes, y las dos progresiones decrecientes

$$\begin{array}{l} \div\!\div 1 : \dfrac{1}{q} : \dfrac{1}{q^2} : \dfrac{1}{q^3} : \ldots : \dfrac{1}{q^n} : \ldots \\ \div\ 0 \,.\, (-r) \,.\, (-2r) \,.\, (-3r) \ldots\ldots (-nr) \ldots \end{array} \quad [2],$$

obtendremos por el primer sistema los logaritmos de los números $1, q, q^2, q^3 \ldots q^n \ldots$ mayores que la unidad, pues se supone $q > 1$; y por el segundo sistema los logaritmos de los números $1, \frac{1}{q}, \frac{1}{q^2}, \frac{1}{q^3} \ldots \frac{1}{q^n} \ldots$ menores que la unidad; pero estas dos últimas progresiones invertidas, pueden considerarse como la prolongacion en sentido descendente de las dos primeras; de modo que, reuniéndolas, tendremos el sistema de dos progresiones

$$\begin{array}{l} \div\!\div \ldots : \dfrac{1}{q^n} : \ldots : \dfrac{1}{q^2} : \dfrac{1}{q} : 1 : q : q^2 : \ldots : q^n : \ldots \\ \div\ \ldots \,.\, (-nr) \ldots\ldots (-2r) \,.\, (-r) \,.\, 0 \,.\, r \,.\, 2r \ldots\ldots nr \ldots \end{array} \quad [3],$$

prolongadas indefinidamente en ámbos sentidos ascendente y descendente, el cual nos da los logaritmos de los números de la primera progresion, que pueden ser mayores ó menores que la unidad.

En este sistema de progresiones prolongadas indefinidamente en ámbos sentidos, sólo hay que atender á que el término 1 de la primera corresponda al término 0 de la segunda, lo que equivale á decir que el $\log 1 = 0$.

Siendo $q > 1$ y $r > 0$, los términos de ámbas progresiones á la derecha de 1 y 0 van creciendo, y podrán llegar á ser mayores que cualquiera cantidad dada siendo n, número de términos, suficientemente grande; los que están á la izquierda en la progresion geométrica, serán siempre positivos, menores que la unidad, é irán decreciendo indefinidamente, y los de la progresion aritmética, siempre serán negativos, pero cada vez mayores en valor numérico; los unos tienen 0 por límite, los otros $-\infty$; de modo que podremos concluir diciendo que el logaritmo $\infty = \infty$, y $\log 0 = -\infty$. Ademas, si un número q^n ocupa en la progresion geométrica un cierto lugar á la derecha á partir de la *unidad*, el que se halle á la izquierda á la misma distancia será $\frac{1}{q^n}$; el primero tendrá por logaritmo rn, el segundo $(-rn)$; lo cual nos prueba que si llamamos log N al logaritmo de un cierto número N, el logaritmo del número recíproco $\frac{1}{N}$ será el mismo logaritmo de N, pero negativo; es decir, $\log \frac{1}{N} = -\log N$.

432. Una vez obtenidas las dos progresiones que determinan el sistema de logaritmos, y suponiendo que sean (teniendo sólo en cuenta la parte ascendente, pues lo que de ésta se diga quedará dicho de la descendente) las dos progresiones

$$\div\div 1 : q : q^2 : q^3 : q^4 : \ldots : q^n : \ldots$$
$$\div 0 . r . 2r . 3r . 4r . \ldots . nr . \ldots;$$

si interpolamos entre cada dos términos de la progresion geométrica un cierto número m de medios proporcionales, y entre cada dos de la progresion aritmética el mismo número m de medios diferenciales, las dos progresiones nuevas que resulten determinarán el mismo sistema de logaritmos; es decir, que los términos de la nueva progresion por diferencia, serán los logaritmos de los términos de la progresion geométrica, considerados en el mismo sistema.

En efecto, los términos $0, r, 2r, 3r \ldots$ que ocupan los lugares primero, segundo, tercero, etc. en la progresion propuesta, y que son los logaritmos de los números $1, q, q^2, q^3$, etc., que ocupan respectivamente los mismos lugares en la progresion por cociente, son términos de la nueva progresion por diferencia que ocupan los lugares $1, m+2, 2m+3, 3m+4 \ldots$, y que corresponden á los mismos números $1, q, q^2, q^3 \ldots$, que en la nueva progresion ocupan los mismos lugares $1, m+2, 2m+3, 3m+4 \ldots$, puesto que habiendo interpolado entre cada par de términos m medios, el que ántes ocupaba el segundo lugar en ámbas progresiones, ahora ocupa el $m+2$; los que ocupaban el tercero, ahora ocupan el $2m+3$, y así sucesivamente. Por consiguiente, los números que ántes formaban la progresion por cociente, tienen en la nueva los mismos logaritmos.

Respecto de los medios que se interpolan en la progresion por cociente, tienen tambien por logaritmos los números correspondientes que se han interpolado en la progresion por diferencia. Esto quedará demostrado probando que si uno de estos medios que forman ahora parte de la nueva progresion se obtiene interpolando dos números diferentes de medios entre cada dos términos de la progresion dada, en los dos casos se hallará para este número el mismo logaritmo.

Supongamos que primero se interpolan entre cada dos términos de las progresiones dadas $p-1$ medios, la razon de la progresion por cociente que resulte será (419) $\sqrt[p]{q}$; y la razon de la progresion aritmética será (407) $\frac{r}{p}$. De modo que un término que ocupa en la primera el lugar $m+1$, será $\left(\sqrt[p]{q}\right)^m$; y el que ocupe el mismo lugar en la segunda será $m\times\frac{r}{p}$.

Supongamos ahora que en vez de $p-1$ se interpolan entre cada dos términos de las progresiones dadas $p'-1$ medios; el término que ahora ocupa el lugar $m+1$, será $\left(\sqrt[p']{q}\right)^{m'}$, y el término correspondiente en la progresion aritmética será $m'\times\frac{r}{p'}$.

Esto supuesto, tratamos de probar que si se tiene la igualdad

$$\left(\sqrt[p]{q}\right)^m=\left(\sqrt[p']{q}\right)^m,$$

se tendrá tambien

$$m\times\frac{r}{p}=m'\times\frac{r}{p'} \quad \text{ó} \quad \frac{m}{p}=\frac{m'}{p'};$$

es decir, que si los números que en las dos progresiones obtenidas sucesivamente ocupan los lugares $m+1$ y $m'+1$ son iguales, sus logaritmos tambien lo son.

En efecto, si se tiene la igualdad $\left(\sqrt[p]{q}\right)^m=\left(\sqrt[p']{q}\right)^m$, elevándola á la potencia pp', tendremos

$$q^{mp'}=q^{pm'}, \quad \text{de donde} \quad mp'=pm', \quad \text{ó} \quad \frac{m}{p}=\frac{m'}{p'},$$

segun queriamos demostrar.

Luego *si se hace que un cierto número* n, *sea uno de los términos de una progresion geométrica, interpolando entre cada dos términos de una progresion dada, ya sea un número* p — 1 *medios, ya un número distinto* p′ — 1, *de las dos maneras hallaremos siempre un mismo logaritmo.*

433. *Si para hallar uno ó más logaritmos se interpolan entre cada dos términos de las progresiones dadas un cierto número* p — 1 *medios, y despues para calcular otros se interpolan* p′ — 1 *medios entre cada dos términos de la nueva progresion, todos los logaritmos hallados así, forman parte de un solo y mismo sistema.*

En efecto, interpolar primero entre dos términos de una progresion $p - 1$ medios, y luégo $p' - 1$ entre cada dos de la progresion que resulte, equivale á interpolar desde luégo (411) $pp' - 1$ medios entre cada dos de la primera; pero los números de la progresion por cociente que así resulten tienen por logaritmos los números correspondientes de la progresion por diferencia, segun lo demostrado anteriormente, y corresponden al sistema propuesto; luego, etc.

434. Desde luégo se comprende, que por muy poco diferente que sea de la unidad la razon de la progresion geométrica, y por muy pequeña que sea por consiguiente la diferencia que hay entre cada dos términos, habrá números que no formarán parte de esta progresion, pero que se hallarán comprendidos entre cada dos consecutivos; sus logaritmos se hallarán comprendidos entre los logaritmos de aquellos términos que les comprenden, y como la diferencia entre éstos puede ser tan pequeña como se quiera (421), podremos tomar por logaritmos de estos números que no se hallan en la progresion, los de los números que les comprenden, y el error que se comete será menor que la diferencia de dichos logaritmos.

Así podremos decir, que el logaritmo de un número que no se halle entre los términos de una progresion, cualquiera que sea el número de medios que se interpolen, pero que se halle comprendido entre dos términos consecutivos, es el *límite de los logaritmos de los números que le comprenden, y que se le pueden aproximar cuanto se quiera.*

Propiedades fundamentales de los logaritmos.

435. Al comparar dos progresiones, una geométrica y otra aritmética, se ve desde luégo la mutua relacion que hay entre sus propiedades generales, si bien es cierto que éstas corresponden á un órden distinto de operaciones. Así se observa inmediatamente, que cuatro números tomados convenientemente en la primera, forman una proporcion geomética; y sus correspondientes en la segunda, forman una proporcion aritmética; y como en aquella se verifica que el producto de los extremos es igual al de medios, y en ésta que la suma de extremos es igual á la de medios, se comprende á primera vista la posibilidad de reemplazar la operacion de multiplicar por la de sumar, la de dividir por la de restar, la de elevar á potencias por una simple multiplicacion, y la extraccion de raices por una division. Este sin duda fué el objeto que le indujo al escocés NEPER á desarrollar su teoría de logaritmos, tan útil hoy por sus inmensas ventajas y aplicaciones.

436. Si nosotros consideramos dos progresiones cualesquiera, una por cociente y otra por diferencia, que mutuamente se correspondan,

$$\begin{array}{l} \div\!\!\div\; a : b : c : d : e : f : g : h : k : l : \ldots \\ \div\; a' . b' . c' . d' . e' . f' . g' . h' . k' . l' \ldots, \end{array}$$

y tomamos en la primera dos términos cualesquiera d y g, y luégo el primero a y otro l, que se halle á partir del segundo g á igual distancia que el término d se halle del primero a de la progresion, se podrán considerar á los términos a y l como los extremos de una progresion, y á los números d y g como dos términos equidistantes de estos extremos, y por consiguiente se tendrá:

$$a \times l = d \times g, \text{ de donde } l = \frac{d \times g}{a}.$$

Tomando los términos correspondientes en la progresion por diferencia, hallaremos que se verificará entre ellos (403) la relacion

$$a' + l' = d' + g', \text{ de donde } l' = d' + g' - a',$$

donde vemos que un término cualquiera l de la progresion por cociente, es igual al producto de otros dos d y g partido por el primer término a; y que el término correspondiente l' de la progresion por diferencia, es igual á la suma de los términos d' y g' correspondientes á los que se multiplicaron en la geométrica, ménos el primer término a' de la progresion por diferencia.

Por consiguiente, si nosotros para mayor sencillez en la determinacion de un término cualquiera en ámbas progresiones, suponemos que el primero de la primera sea la *unidad*, y el primero de la segunda sea *cero*, lo cual es siempre posible por ser arbitrarias ámbas progresiones, tendremos que las relaciones anteriores se convierten en

$$1 \times l = d \times g \quad \text{ó} \quad l = d \times g,$$

y $$0 + l' = d' + g' \quad \text{ó} \quad l' = d' + g',$$

cuyas igualdades nos prueban, que si, como al principio hemos supuesto, las progresiones que constituyen un sistema, principia la una por 1 y la otra por 0, el producto de dos términos cualesquiera de la primera, será otro término de la misma progresion; y la suma de los dos términos correspondientes en la progresion por diferencia, será otro término de la misma, correspondiente al de la progresion geométrica. De aquí la condicion necesaria de principiar la progresion geométrica por la *unidad*, y la aritmética por *cero;* porque de ello se deduce la gran ventaja de poder reemplazar la operacion de multiplicar dos números por la de sumar sus logaritmos, pues esta suma nos dará á conocer el logaritmo del producto, el cual será el término correspondiente á este logaritmo en la progresion geométrica. Esto constituye la primera propiedad de los logaritmos, que podremos considerar como la fundamental, y que se enuncia así:

437. *El logaritmo de un producto es igual á la suma de los logaritmos de los factores.*

Sean las progresiones que constituyen el sistema de logaritmos

$$\div\div \ldots : \frac{1}{q^n} : \ldots : \frac{1}{q^2} : \frac{1}{q} : 1 : q : q^2 : \ldots : q^n : \ldots : q^m : \ldots : q^s \ldots$$

$$\div \ldots (-nr) \ldots . (-2r) . (-r) . 0 . r . 2r . \ldots . nr . \ldots . mr . \ldots . sr \ldots$$

y supongamos en primer lugar dos números a y b, tomados en la parte ascendente de las progresiones, y sean, por ejemplo, $a = q^n$ y $b = q^m$; se tendrá

$$a \times b = q^n \times q^m = q^{n+m}.$$

En la segunda progresion, los logaritmos de a y b son $\log a = nr$, y $\log b = mr$; luego $\log a + \log b = nr + mr = (n+m)r$; pero $(n+m)r$ es el logaritmo de q^{n+m}; luego

$$\log (a \times b) = \log a + \log b.$$

Supongamos, en segundo lugar, que a corresponde á la parte descendente, y b á la ascendente, pero más distante del primer término 1 que a; tendremos $a = \frac{1}{q^n}$, $b = q^m$, de donde

$$a \times b = \frac{1}{q^n} \times q^m = q^{m-n}.$$

Pero en la segunda progresion se tiene, $\log a = -nr$, $\log b = mr$; luego $\log a + \log b = -nr + mr = (m-n)r$; y como $(m-n)r$ es evidentemente el logaritmo de q^{m-n}, se tendrá tambien como anteriormente, $\log (a \times b) = \log a + \log b$.

Si $m < n$ ó $m = n$, la igualdad anterior se hubiera verificado igualmente, pues en el primer caso se tendria $a \times b = q^{m-n} = q^{-(n-m)} = \frac{1}{q^{n-m}}$, y $\log a + \log b = -nr + mr = -(n-m)r$; siendo $-(n-m)r$ el logaritmo de $\frac{1}{q^{n-m}}$, la igualdad anterior se verifica. En el segundo caso se tiene $\log (a \times b) = 0$, como debe suceder; pues siendo $a = \frac{1}{q^n}$ y $b = q^n$, el producto $a \times b$ se reduce á la unidad, cuyo logaritmo es 0.

Sean, por último, a y b dos números tomados en la parte descendente, de modo que $a = \frac{1}{q^n}$ y $b = \frac{1}{q^m}$, de donde se deduce, $a \times b = \frac{1}{q^{n+m}}$; pero $\log a = -nr$, y $\log b = -mr$;

luego $\log a + \log b = -nr - mr = -(n+m)r$; y como $-(n+m)r$ es el logaritmo de $\frac{1}{q^{n+m}}$, se sigue que tambien se verifica la igualdad

$$\log(a \times b) = \log a + \log b.$$

Si el número de factores fuese mayor que dos, se hallaria que $\log(a \times b \times c \times d \times \ldots) = \log a + \log b + \log c + \ldots$

Para ello descompondriamos el producto dado en otro compuesto del primer factor, y el producto de todos los demas; así tendremos

$$\log(a \times bc \ldots) = \log a + \log(bc \ldots);$$

pero $\quad \log(bc \ldots) = \log(b \times c \ldots) = \log b + \log c \ldots;$

luego $\quad \log(abc \ldots) = \log a + \log b + \log c + \ldots,$

segun queriamos demostrar.

438. El logaritmo del producto de dos ó más números que no se hallen formando parte de la progresion geométrica, es el límite de la suma de los logaritmos de los números que, formando parte de la progresion, comprenden á los números dados y se les pueden aproximar cuanto se quiera. Así, si nosotros consideramos varios números N, N', N'', N''' ... que no se hallan en la progresion geométrica, podremos interpolar un cierto número de medios proporcionales tal, que la diferencia entre dos consecutivos sea tan pequeña como queramos; y si suponemos que n, n', n'', n''' ... sean los términos inmediatamente inferiores á los números N, N', N'', N''' ... pudiendo aproximarse á ellos cuanto se quiera, tendremos

$$\log(n \times n' \times n'' \times n''' \ldots) = \log n + \log n' + \log n'' + \ldots;$$

pero el primer miembro se puede aproximar cuanto queramos á $\log(N \times N' \times N'' \times N''' \ldots)$, y el segundo á $\log N + \log N' + \log N'' + \log N''' + \ldots$; y como constantemente se verifica la igualdad anterior, cualquiera que sea el grado de aproximacion, en el límite tambien se verificará; con lo cual queda justificado el principio con toda generalidad.

439. *El logaritmo de una potencia entera y positiva de un*

número, es igual al exponente multiplicado por el logaritmo del número.

Sea una potencia a^n, cuyo exponente n es entero y positivo. Segun la definicion de potencia, se tendrá

$$\begin{aligned}\log a^n &= \log(a\times a\times a\times a\times\ldots),\\ &=\log a+\log a+\log a+\ldots=n\log a.\end{aligned}$$

440. *El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del dividendo ménos el logaritmo del divisor.*

Sea un cociente $\frac{a}{b}$, que llamaremos q, y se tendrá

$$a=b\times q,\ \text{y por tanto,}\ \log a=\log b+\log q;$$

de donde

$$\log q=\log a-\log b,\qquad \text{ó}\qquad \log\frac{a}{b}=\log a-\log b.$$

441. *El logaritmo de una raiz de un número cuyo índice es entero y positivo, es igual al logaritmo del número dividido por el índice de la raiz.*

Sea la raiz $\sqrt[m]{a}$, la cual llamaremos r, y tendremos $a=r^m$; de donde (439) $\log a=m\log r$, y por consiguiente

$$\log r=\frac{\log a}{m},\quad \text{ó}\quad \log\sqrt[m]{a}=\frac{\log a}{m}.$$

LECCION XLIX.

Módulos de los logaritmos. Diferentes sistemas de logaritmos segun sus módulos. Sistema *neperiano*. — Base de un sistema de logaritmos. Diferentes sistemas considerados segun sus bases. Sistema de logaritmos vulgares, llamados de Briggs.— Construccion de las tablas de los logaritmos vulgares.

Módulos de los logaritmos. Diferentes sistemas de logaritmos segun sus módulos. Sistema *neperiano*.

442. Si nosotros queremos tener unas tablas de logaritmos en donde se halle la serie natural de los números 1, 2, 3 ... hasta un cierto límite l, y enfrente la serie de logaritmos cor-

respondiente á un cierto sistema, es necesario suponer que se tiene una progresion geométrica cuya razon, siendo mayor que la unidad, se diferencie de ella en tan poco como se quiera, de modo que los términos de esta progresion crecerán por grados tan pequeños como queramos, á partir del primer tèrmino 1; de este modo cada uno de los números de la serie natural 1, 2, 3 ... es un término de esta progresion, ó está comprendido entre dos, de manera que podremos tomar el menor de ellos por dicho número, cometiendo un error tan pequeño como se quiera. Para obtener sus logaritmos es necesario suponer que se tiene además otra progresion por diferencia cuyo primer término es *cero*, y cuya razon r puede ser tambien tan pequeña como queramos; de este modo los logaritmos crecerán, á partir de *cero*, por grados insensibles. Es necesario admitir, que la razon de la progresion por diferencia es sumamente pequeña; porque de lo contrario, números finitos podrian tener por logaritmos números infinitos.

443. Como la diferencia entre la razon de la progresion por cociente y la unidad, y la razon de la progresion por diferencia, pueden ser tan pequeñas como queramos, pero arbitrarias, es claro que podrán variar cuanto se quiera, habiendo siempre entre ellas una cierta relacion. Así, llamando q á la razon de la progresion geométrica, y r á la de la progresion aritmética, podemos hacer que $q-1$ sea tan pequeña como queramos, y que r sea el doble, triple, etc., ó la mitad, tercera parte, etc.; de modo que se tendrá, llamando M á esta relacion,

$$\frac{r}{q-1}=\text{M} \text{ ó } r=\text{M}(q-1).$$

La relacion M que existe entre la diferencia de la razon por cociente y la unidad, y la razon de la progresion aritmética, se llama *módulo* de los logaritmos. El módulo de los logaritmos varía, por consiguiente, segun sea la relacion que hay entre $q-1$ y r.

444. Si consideramos una progresion geométrica cuyos términos se diferencian entre sí en tan poco como queramos, y diferentes progresiones aritméticas

$$
\begin{array}{l}
\div\, 1 : q \;\; : q^2 \;\; : q^3 \;\; : q^4 \;\; : \ldots : q^n \;\; : \ldots \\
\div\, 0 \,.\, r \;\; . \, 2r \;\; . \, 3r \;\; . \, 4r \;\; \ldots . \, nr \;\; \ldots \\
\div\, 0 \,.\, r' \, . \, 2r' \, . \, 3r' \, . \, 4r' \, \ldots . \, nr' \, \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

cada uno de los términos de estas últimas serán los diferentes logaritmos de los términos de la primera; y si llamamos M, M′, etc. los módulos de estos logaritmos, se tendrá

$$\frac{r}{q-1}=\mathrm{M},\quad \frac{r'}{q-1}=\mathrm{M}', \text{ etc.,}$$

ó $$r=\mathrm{M}(q-1),\quad r'=\mathrm{M}'(q-1), \text{ etc.,}$$

y las progresiones por diferencia se convertirán en

$$
\begin{array}{l}
\div\, 0 \,.\, \mathrm{M}\,(q-1) \,.\, 2\mathrm{M}\,(q-1) \,.\, 3\mathrm{M}\,(q-1) \ldots . \, n\mathrm{M}\,(q-1) \ldots \\
\div\, 0 \,.\, \mathrm{M}'(q-1) \,.\, 2\mathrm{M}'(q-1) \,.\, 3\mathrm{M}'(q-1) \ldots . \, n\mathrm{M}'(q-1) \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

las cuales nos prueban, que los logaritmos de dos sistemas correspondientes á los mismos números, están en una relacion constante é igual á la que hay entre los módulos; de modo, que si llamamos R á esta relacion, log N y log′ N á los dos logaritmos de un número cualquiera N, tomados en dos sistemas distintos, se tendrá

$$\frac{\log \mathrm{N}}{\log' \mathrm{N}}=\mathrm{R}, \quad \text{de donde} \quad \log \mathrm{N}=\mathrm{R}\log' \mathrm{N},$$

siendo R la relacion entre los módulos M y M′ de ámbos sistemas.

Por esta fórmula se puede hallar el logaritmo de un número en un sistema cualquiera, conociendo el logaritmo del mismo número en otro sistema, y la relacion de los módulos.

El sistema que tiene la unidad por módulo, se llama *neperiano*, por ser éste el que Neper, inventor de los logaritmos, consideró. Se define en general diciendo, que sistema neperiano *es aquel en el cual la razon de la progresion por diferencia, es igual á la diferencia extremadamente pequeña que hay entre la razon de la progresion geométrica y la unidad*. Por razones que no son de este lugar, se le llama tambien al sistema neperiano, sistema de logaritmos *hiperbólicos;* y se diferencian de los ordinarios representando éstos por las letras *log.*, y los neperianos por la sola letra *l*.

445. Siendo el módulo del sistema neperiano la unidad, la relacion que hay entre los módulos de este sistema y otro cualquiera, es el módulo de este otro sistema; de modo, que *para pasar del sistema de logaritmos neperianos á otro cualquiera, no hay más que multiplicar aquellos por el módulo de este sistema.*

Base de un sistema de logaritmos. Diferentes sistemas considerados segun sus bases.

446. Ya hemos visto que se pueden unir á una progresion geométrica cuyos términos varían insensiblemente á partir de 1, varias progresiones aritméticas, cuyos términos varían tambien de un modo insensible á partir de 0, obteniendo de este modo varios sistemas de logaritmos; y que estos sistemas quedan determinados conociendo los módulos, ó sea la relacion de los incrementos de los primeros términos 0 y 1 de ámbas progresiones para obtener los segundos r y q.

Tambien pueden determinarse, y es lo más general, cuando se conoce el número que corresponde á un cierto logaritmo. Así, si conociésemos el número que tiene por logaritmo la unidad, el sistema quedaria determinado; pues conociendo dos términos de cada progresion, se podria determinar la razon, y por consiguiente todos los demas términos.

El número que tiene por logaritmo la unidad, se le llama *base* del sistema (*).

(*) Se podria proponer como ejercicio calcular la base del sistema neperiano dado por su definicion; mas para ello, si suponemos que $n+1$ sea el lugar que ocupa la *unidad* en la progresion aritmética, se tendrá $1=nr$; de donde $n=\frac{1}{r}$. El término correspondiente de la progresion geométrica será $(1+r)^n$, que por la igualdad anterior se convierte en $(1+r)^{\frac{1}{r}}$, de modo que se hallará la base pedida determinando el límite hácia el cual tiende esta expresion cuando r tiende há-

Entre todos los sistemas de logaritmos, el que ofrece más ventajas en los cálculos es aquel que tiene por base el número 10, del cual nos ocuparemos especialmente.

447. Cuando los sistemas de logaritmos están determinados por sus bases, es muy fácil la reduccion de los de un sistema en los de otro.

En efecto, ya hemos visto (444) que llamando R á la relacion constante que hay entre los logaritmos de un mismo número en dos distintos sistemas, conociendo el logaritmo de un número cualquiera en un sistema, el de este mismo número en el otro sistema se halla multiplicando por R el logaritmo conocido. Esto supuesto, si nosotros suponemos conocidas las bases a y a' de dos sistemas y el logaritmo de una de ellas a' en el otro sistema, como el logaritmo de la misma en su sistema es la unidad, se tendrá conocida la relacion R, pues será $R=\frac{1}{\log a'}$; luego multiplicando los logaritmos del primer sistema por la cantidad constante $\frac{1}{\log a'}$, que es la unidad partida por el logaritmo de la nueva base tomado en el sistema conocido, se hallarán los logaritmos del segundo sistema. La cantidad $\frac{1}{\log a'}$, se suele llamar tambien *módulo relativo* de los logaritmos.

Sistema de logaritmos vulgares llamados de *Briggs*.

448. El sistema de logaritmos que ordinariamente se usa en los cálculos numéricos es aquel cuya *base* es *diez*, y está determinado por las progresiones

$$\div\!\div\ 1 : 10 : 10^2 : 10^3 : \ldots : 10^n : \ldots$$
$$\div\ 0 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ \ldots\ldots\ n \ \ldots\ldots$$

---

cia *cero*. Este límite se halla poniendo r en funcion de n, lo que nos convertirá la expresion anterior en $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, y hallando el límite de ésta cuando $n=\infty$.

Este límite es el número $e=2,7182818\ldots$

Por la doble razon de ser este sistema el que comunmente se usa, y de haber sido Briggs el primero que construyó las primeras tablas á principios del siglo XVII, se le llama sistema de *logaritmos vulgares* ó de *Briggs*.

En este sistema, *el logaritmo de una potencia de diez es igual al exponente de esta potencia*. Así, el logaritmo de 10 es 1; el de $100 = 10^2$, es 2; el de $1000 = 10^3$, es 3; y en general, el logaritmo de 10^n, es n. Porque siendo 10 la base, su logaritmo será (446) 1; y el logaritmo de una potencia, siendo igual al exponente multiplicado por el logaritmo de la raiz, se tendrá

$$\log 10^n = n \log 10 = n.$$

449. *Los logaritmos de los números que no sean potencias de 10, ya sean enteros ó fraccionarios, son inconmensurables.*

En efecto, sea un número cualquiera $\frac{p}{q}$, que no sea potencia de 10, y vamos á demostrar que este número no puede ser un término de la progresion $\div 1 : 10 : 100 : \ldots$, cualquiera que sea el número de medios que se interpolen; y por consiguiente, su logaritmo no puede ser ninguno de los números correspondientes de la progresion aritmética, y por tanto tiene que ser inconmensurable.

La condicion que hemos hallado (426) para que tres números a, b, c sean términos de una progresion, se reduce en este caso, puesto que $a = 1$, $b = \frac{p}{q}$ y $c = 10$, á

$$\left(\frac{p}{q}\right)^n = 10^m,$$

siendo n y m dos números enteros.

Ahora bien, siendo el segundo miembro un número entero, el primero tambien deberá serlo; y como $\frac{p}{q}$ es una fraccion irreducible, $\frac{p^n}{q^n} = \left(\frac{p}{q}\right)^n$ tambien lo será, y por tanto se deberá tener $q = 1$; de donde se saca $p^n = 10^m$; mas para que esta igualdad se verifique, es necesario que p no contenga más factores primos que los que hay en 10; es decir, que se debe tener $p = 2^r \times 5^s$, lo que hace que la igualdad anterior se convierta en $2^{rn} \times 5^{sn} = 2^m \times 5^m$; de donde deduciremos, $rn = m = sq$ ó $r = \frac{m}{n} = s$; lo cual nos prueba, que los exponentes de los factores 2 y 5 deben ser iguales, y por consiguiente p debe ser una potencia exacta de 10.

Luego sólo las potencias de 10 son los únicos números conmensurables que pueden formar parte de la progresion geométrica, de la cual 1 y 10 forman parte; por consiguiente, cualquier otro número entero ó fraccionario, no formando parte de la progresion geométrica del sistema vulgar, sea cualquiera el número de medios que se interpole, no puede tener término correspondiente en la progresion aritmética del mismo sistema, y su logaritmo es por lo tanto inconmensurable, segun queriamos demostrar.

450. Los logaritmos de los números están calculados en decimales; y se acostumbra llamar *característica* á la parte entera del logaritmo, y *mantisa* á la parte decimal del mismo.

451. *La* CARACTERÍSTICA *del logaritmo de un número, es igual á tantas unidades ménos una, como cifras tiene la parte entera de dicho número.*

En efecto, todo número comprendido entre 1 y 10, no tiene su parte entera más que una cifra; su logaritmo está comprendido entre 0 y 1; luego tendrá por característica 0. Todo número comprendido entre 10 y 100, tiene dos cifras su parte entera; su logaritmo, hallándose comprendido entre 1 y 2, tendrá 1 por parte entera ó característica. En general, todo número comprendido entre 10^n y 10^{n+1}, tiene $n + 1$ cifras en su parte entera; su logaritmo, hallándose comprendido entre n y $n + 1$, tiene por característica n, número igual al de cifras ménos una que tiene la parte entera de dicho número.

452. *El logaritmo de un número multiplicado ó partido por una potencia entera de 10, es igual al logaritmo del mismo número aumentado ó disminuido en el exponente de dicha potencia.*

En efecto, sea N un número y log N su logaritmo. El logaritmo de este número multiplicado ó partido por una potencia entera de 10, será (437, 440 y 448)

$$\log (N \times 10^n) = \log N + \log 10^n = \log N + n,$$

y $$\log \left(\frac{N}{10^n}\right) = \log N - \log 10^n = \log N - n,$$

cuyas igualdades justifican el enunciado del teorema.

Consecuencia. Cuando dos números decimales no difieren más que por la colocacion de la coma, sus logaritmos no se diferencian más que en la característica.

453. *El logaritmo de una fraccion es igual al logaritmo de la fraccion inversa tomada con signo contrario.*

Sea la fraccion $\frac{a}{b}$ y su inversa $\frac{b}{a}$; de la igualdad evidente $\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1$, se deduce $\log \frac{a}{b} + \log \frac{b}{a} = \log 1 = 0$, de donde

$$\log \frac{a}{b} = -\log \frac{b}{a},$$

segun queriamos demostrar.

Consecuencia. Los logaritmos de las fracciones decimales 0,1; 0,01; 0,001; ... tienen por logaritmos respectivos -1, -2, -3, ... y en general $\log \frac{1}{N} = -\log N$.

454. Recíprocamente, *el número correspondiente á un logaritmo negativo, es de la forma* $\frac{1}{N}$, *siendo* N *el número correspondiente al logaritmo dado tomado positivamente.*

En efecto, todo logaritmo negativo puede ser considerado como la diferencia entre el logaritmo de un número correspondiente al logaritmo dado considerado positivamente, y el logaritmo de la unidad que siempre es *cero*. Así,

$$-\log N = \log 1 - \log N = \log \frac{1}{N}.$$

Observacion. De lo dicho anteriormente se deduce que en el sistema de logaritmos vulgares, los de los números mayores que la unidad son positivos y crecen indefinidamente con el número; los logaritmos de los números menores que la unidad son negativos y tanto mayores en valor numérico cuanto menor es el número á que pertenecen. Así se dicè que

$$\log 0 = -\infty,\ \log \frac{1}{N} = -\log N,\ \log \frac{1}{\text{la base}} = -1,$$

$$\log 1 = 0,\ \log (\text{de la base}) = 1,\ \log \infty = \infty.$$

Construccion de las tablas de los logaritmos vulgares.

455. Se llaman *tablas de logaritmos vulgares*, aquellas en que se halla la serie natural de los números desde 1 hasta un cierto límite L, y enfrente de cada número su logaritmo correspondiente al sistema vulgar.

No es necesario consignar en las tablas más que los logaritmos de los números enteros mayores que la unidad, porque el cálculo de cualquier clase de números siempre se reduce al de los enteros.

456. La construccion de unas tablas de logaritmos por los medios que la aritmética suministra, es sumamente penosa; en nuestras lecciones de Algebra superior exponemos medios sencillos y breves para calcular unas tablas de logaritmos.

Ahora tan sólo indicaremos el método que tendriamos que seguir para este cálculo, manifestando las modificaciones que podrian emplearse para lograr más fácilmente nuestro objeto.

457. Si nosotros tratamos de calcular los logaritmos vulgares desde 1 hasta 100 000 por ejemplo, y queremos que sean exactos en ménos de una unidad del séptimo órden decimal ó sea en ménos de una diezmillonésima, es necesario que los términos de la progresion aritmética del sistema, se diferencien á lo más en una *diezmillonésima;* y para esto es menester que haya, por lo ménos, ántes del término 10 de la progresion geométrica, diez millones de términos; por consiguiente para obtener la razon de esta progresion, es necesario extraer del número 10, una raiz cuyo índice sea 10 *millones* ó $10^7 = 2^7 5^7$, cuya operacion, aunque puede hacerse por raices cuadradas y raices quintas sucesivas, es sin embargo en extremo pesada.

La interpolacion del mismo número de términos diferenciales, en la progresion aritmética no ofrece dificultad, pues la razon se hallará dividiendo la unidad, razon de la progresion dada, por 10 *millones*, número de términos que ha de haber ántes del término 1, en dicha progresion.

458. Para evitar la extraccion de las raices quintas de que anteriormente hemos hablado, se interpolará entre los dos términos 1 y 10 de la progresion geométrica dada, un número mayor que 10 millones, pero que venga expresado por la fórmula $2^n = 1$, y entónces la raiz de la progresion resultante, se hallará por una serie de raices cuadradas sucesivas (423). Así, elevando 2 á sus diferentes potencias, hallaremos $2^{23} = 8388608$ y $2^{24} = 16777216$; por consiguiente 16777216 será el grado de la raiz que es necesario extraer de 10, razon de la progresion geométrica dada, cuya raiz se hallará por medio de 24 raices cuadradas sucesivas; y por tanto el número de medios que tendremos que interpolar entre 1 y 10 será $2^{24} - 1 = 16777215$.

De este modo tomaremos en la progresion geométrica los términos que más se aproximen á la serie natural de los números desde 1 hasta el límite marcado, y colocando enfrente los términos correspondientes de la progresion aritmética, tendremos las tablas de logaritmos calculadas con siete cifras decimales.

En efecto, sea N un número cualquiera menor que el límite que se ha considerado, el cual, si no es un término de la progresion geométrica por no ser una potencia exacta de 10 (449), se hallará comprendido entre dos términos q^n y q^{n+1} de dicha progresion. Sean nr y $(n+1)r$ los dos términos correspondientes en la progresion aritmética, y tendremos, que hallándose el número N comprendido entre q^n y q^{n+1}, el logaritmo de N se hallará comprendido entre nr y $(n+1)r$; luego si tomamos por el logaritmo de N cualquiera de los dos números nr ó $(n+1)r$, el error que se cometerá será menor que la diferencia de estos números, que es r; y como r es menor ó á lo ménos igual á una *diezmillonésima*, es claro que el error cometido será menor que una *diezmillonésima*, segun se pedia.

Basta haber indicado el método anterior para comprender que es impracticable por su excesiva pesadez.

459. Aunque no tan pesado como el método anterior, no por eso deja de serlo en alto grado tambien, el ir calculando el logaritmo de cada número por separado, interpolando entre cada dos

términos de las progresiones geométrica y aritmética medios proporcionales y diferenciales que comprendan al número cuyo logaritmo se quiere calcular.

Sea N un número cuyo logaritmo queremos calcular, y supongamos que N se halla comprendido entre 10^n y 10^{n+1}; su logaritmo se hallará entre n y $n+1$. Interpolemos entre 10^n y 10^{n+1} un medio proporcional cuya razon se obtendrá extrayendo la raiz cuadrada de 10; interpolemos entre n y $n+1$ un medio diferencial; llamemos A al primero y a al segundo, y supongamos que N se halla comprendido entre 10^n y A. El logaritmo de N se hallará comprendido entre n y a; determinemos un medio geométrico entre 10^n y A, y un medio aritmético entre n y a; sea el primero B y el segundo b, y supongamos que N se halla comprendido entre B y A; el logaritmo de N estará entónces comprendido entre b y a, continuando así hasta hallar dos números en la progresion geométrica que comprendan á N, y que los dos números correspondientes en la progresion aritmética, se diferencien por lo ménos en una *diezmillonésima;* en ese caso, tomando uno de estos por el logaritmo de N, el error que se cometerá será menor que una unidad del séptimo órden decimal, segun queriamos.

460. Por este medio no tenemos necesidad de calcular nada más que los logaritmos de los números primos menores que el límite dado, pues los compuestos se obtendrán (437) sumando los logaritmos de los factores primos que le forman.

Mas para que todos los logaritmos vengan aproximados en ménos de una *diezmillonésima*, es necesario ver con qué error se deben calcular los logaritmos de los números primos, para que al sumarlos y obtener los logaritmos de los compuestos vengan éstos con la aproximacion deseada.

Sea 100 000 el mayor número de las tablas, el menor número primo que hay que calcular es 2, y $2^{17} = 131\ 072$; luego aunque el número superior de las tablas fuese 130 000, cualquier número menor que éste no podria componerse de más de 17 factores; luego si calculamos los logaritmos de los números primos con 9 cifras decimales, el *máximun* del error que se podrá cometer, es de 17 unidades del órden *noveno* decimal, cantidad menor que 2 unidades del órden *octavo;* por consiguiente estamos seguros de tener todos los logaritmos aproximados en ménos de una unidad del órden *séptimo* decimal, que es el que se pide.

LECCION L.

Disposicion de las tablas de Lalande. — Dado un número cualquiera, hallar su logaritmo. — Dado el logaritmo de un número, hallar este número.

Disposicion de las tablas de Lalande.

461. Las tablas de logaritmos que con más frecuencia se usan son las de *Lalande* y de *Callet;* la disposicion y uso de las primeras es el objeto de la presente leccion.

Las tablas de Lalande contienen los logaritmos de todos los números enteros desde 1 hasta 10 000. Los logaritmos de los 990 primeros números se hallan calculados con *ocho* cifras decimales, y los restantes con siete.

Se hallan dispuestas estas tablas en tres columnas: la primera, señalada con la palabra Nomb.; inicial de *nombre* (número), contiene los números enteros desde 0 hasta 10 000. La segunda, marcada Logarith., inicial de *logarithmes* (logaritmos), contiene los logaritmos correspondientes á estos números, calculados segun hemos dicho con *ocho* cifras decimales hasta el número 990, y con *siete* desde este número en adelante. La tercera principia á figurar á partir del número 990, y se halla marcada con la palabra Diff., inicial de *différence* (diferencia); en ella se encuentran consignadas las diferencias entre los logaritmos consecutivos. Estas diferencias vienen expresadas en unidades del último órden decimal, y se las conoce con el nombre de *diferencias tabulares*.

Dado un número cualquiera, hallar su logaritmo.

462. Primer caso. *Que el número dado para hallar su logaritmo sea entero y no pase de* 10 000. Cuando el número cumpla con estas condiciones, se busca en las columnas marcadas con Nomb., y su logaritmo se halla colocado enfrente en la columna señalada con Logarith.

Así, se hallará, que el logaritmo del número 6593 es 3,8190831.

463. Segundo caso. *Que el número dado sea entero y mayor que el límite de las tablas* 10 000. Para hallar el logaritmo de un número que se halle en este caso, se principia por separar á la derecha con una coma tantas cifras cuantas sea necesario, para que el número que quede á la izquierda se halle comprendido en el primer caso, y segun él se determinará la mantisa del logaritmo correspondiente. Despues se calculará la parte correspondiente á las cifras separadas á la derecha, multiplicando esta parte por la diferencia tabular, separando de la derecha del producto tantas decimales como cifras tenga la parte separada, y en lo que resulte á la izquierda se agrega á la mantisa hallada; el resultado será la mantisa del logaritmo del número propuesto. Finalmente, poniendo á esta mantisa la característica correspondiente (451) al número de cifras que tenga el número dado, se tendrá el logaritmo pedido.

Sea, por ejemplo, hallar el logaritmo del número 447358.

Separemos las dos últimas cifras de la derecha, y hallaremos el número 4473,58, cuyo logaritmo tendrá la misma mantisa que el número propuesto (452); pero la mantisa del logaritmo de este número se compondrá de la mantisa del logaritmo de la parte entera 4473, más la parte correspondiente á las cifras separadas á la derecha consideradas como decimales. La mantisa del logaritmo de la parte entera, es, segun el caso anterior, 6505989; la parte decimal correspondiente á las cifras separadas á la derecha se halla por la siguiente proporcion:

$$1 : dif\ de\ log :: dif\ de\ núm : x,$$

ó representando por d la diferencia de los números y por Δ la de los logaritmos, se tendrá

$$1 : d :: \Delta : x, \quad \text{de donde} \quad x = d \times \Delta.$$

En el ejemplo presente se tiene $d = 0{,}58$, $\Delta = 971$, y por tanto la proporcion anterior se convertirá en

$$1 : 0{,}58 :: 971 : x, \text{ de donde } x = 971 \times 0{,}58 = 563{,}18;$$

por consiguiente, agregando á la mantisa hallada 6505989 el número 563, que resulta de multiplicar las cifras separadas 58 por la diferencia de las tablas 971, y separando de la derecha de este producto el mismo número de cifras que separamos en el propuesto, hallaremos la mantisa 6506552 del logaritmo del número 4473,58, que es la misma que la del logaritmo del número propuesto. Poniendo por característica á esta mantisa tantas unidades como cifras ménos una tiene el número dado, se hallará el logaritmo pedido. Luego se tendrá

$$\log 447358 = 5{,}6506552.$$

El cálculo del logaritmo de un número entero mayor que el límite de las tablas, se dispone como en el ejemplo siguiente:

Sea hallar el logaritmo del número 8346875.

	Logaritmo 8346,000 =	3,9214784	$d = 875$
	parte correspondiente á 0,875 =	455	$\Delta = 520$
	logaritmo 8346,875 =	3,9215239	17500
luego	logaritmo 8346875 =	6,9215239	4375
			455,000

464. Tercer caso. *Que el número cuyo logaritmo queremos hallar sea una fraccion decimal, ó contenga cifras decimales.*

Si el número propuesto es una fraccion decimal, ó tiene cifras decimales, se corre la coma á la derecha ó izquierda, segun convenga, para que el número de cifras que resulte á la izquierda de la coma se halle comprendido en los límites de las tablas; se busca el logaritmo de todo el número considerado como entero, segun los casos anteriores, y por último, se le disminuyen ó aumentan á la característica tantas unidades como lugares se corrió la coma á la derecha ó izquierda.

Segun esto, y teniendo presente que

$$\log 8346875 = 6{,}9215239,$$

se tendrá que

$$\begin{aligned}
\log\ 834{,}6875 &= 2{,}9215239\\
\log\ 8{,}346875 &= 0{,}9215239\\
\log\ 0{,}8346875 &= \overline{1}{,}9215239\\
\log\ 0{,}008346875 &= \overline{3}{,}9215239.
\end{aligned}$$

465. El método que acabamos de exponer para hallar el logaritmo de un número decimal, da orígen á logaritmos cuya característica es negativa, siendo positiva la mantisa; lo que se expresa poniendo el signo — encima de dicha característica.

Si en vez de restar de la característica del logaritmo el número de unidades de que anteriormente hemos hablado, lo restásemos de todo el logaritmo, obtendriamos un resultado completamente negativo, lo cual da orígen á las dos formas que puede tener el logaritmo de una decimal, segun que sea negativo todo el logaritmo, ó solamente la característica. Así, se tendrá

$$\log 0{,}008346875 = \overline{3}{,}9215239$$

ó

$$\log 0{,}008346875 = -2{,}0784761.$$

466. Cuarto caso. *Que el número dado sea una fraccion ordinaria.* Para determinar el logaritmo de una fraccion ordinaria, se pueden seguir dos métodos: 1.°, restar del logaritmo del numerador el logaritmo del denominador; 2.°, convertir la fraccion ordinaria en decimal, y queda reducida la cuestion á buscar el logaritmo de una decimal. El primer método es preferible al segundo, por ser más breve y porque no siempre es posible convertir exactamente la fraccion propuesta en decimal.

Si la fraccion dada es impropia, el logaritmo del numerador será mayor que el logaritmo del denominador, y por tanto no habrá dificultad en efectuar la resta de que anteriormente hemos hablado; si el numerador y denominador son iguales, sus logaritmos tambien lo serán, su diferencia será *cero*, como debe ser, pues entónces el quebrado es igual á la unidad, y el logaritmo de 1 es *cero*. Finalmente, si la fraccion es propia, no se podrá restar el logaritmo del denominador de el logaritmo del numerador, lo que nos prueba que el logaritmo deberá ser negativo; deberá por lo tánto ir precedido del signo —, y su valor numérico se hallará restando del logaritmo mayor el menor.

Dado el logaritmo de un número, hallar este número.

467. Primer caso. *Que el logaritmo dado, siendo positivo, tenga* 3 *de característica.* Si el logaritmo es positivo, pertenece á un número mayor que la unidad, y su característica aumen-

tada en una unidad, indica el número de cifras de que se compone la parte entera de dicho número.

Si el logaritmo dado tiene 3 de característica, segun hemos dicho, el número á que pertenece se hallará comprendido entre 1000 y 10 000. Para hallar este número, se busca el logaritmo dado en la columna señalada con LOGARITH., y aquí puede suceder uno de dos casos:

1.° *Que la mantisa se halle en las tablas.* En este caso el número buscado se halla colocado á la izquierda en la columna marcada con NOMB.

Así tenemos que los logaritmos 3,8433574 y 3,0507663, corresponden á los números 6972 y 1124.

2.° *Que la mantisa de un logaritmo cuya característica es* 3, *no se halle exactamente en las tablas.* Si la mantisa del logaritmo dado no se halla contenida exactamente en las tablas, se hallará comprendida entre dos consecutivas correspondientes á los logaritmos de dos números de cuatro cifras y diferentes en una unidad. El menor de estos dos números expresa la parte entera del que nosotros buscamos.

La parte decimal que falta se determina partiendo la diferencia que hay entre el logaritmo dado y el más próximo inferior, por la diferencia tabular. Es decir, que si llamamos D á la diferencia que hay entre el logaritmo dado y el más próximo inferior, y por Δ la diferencia tabular, se tendrá llamando x á la parte decimal que falta al número inferior, para representar el número buscado

$$x = \frac{D}{\Delta}, \qquad [1]$$

cuya expresion se deduce de la proporcion admitida de que las diferencias de los logaritmos son proporcionales á las de los números; es decir, de la proporcion

$$\Delta : D :: 1 : x, \text{ de donde } x = \frac{D}{\Delta}.$$

El valor de x debe calcularse á lo más con tres cifras decimales.

Sea, por ejemplo, hallar el número correspondiente al logaritmo 3,9215239.

Este logaritmo no se halla en las tablas, sino que está comprendido entre los logaritmos 3,9214784 y 3,9215304 correspondientes á los números 8346 y 8347; por tanto, la parte entera del número que vamos buscando, será 8346; la parte decimal se hallará por la expresion [1], haciendo $D = 455$, y $\Delta = 520$, de modo que se tendrá $x = 0,875$. Luego el número buscado será igual á 8346,875.

Los cálculos se disponen del modo siguiente:

$$\begin{array}{l}
\log\ N = 3,9215239 \\
\log 8346 = 3,9214784 \\
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
D = 455 & 520 = \Delta \\
390 & 0,875 \\
260 & \\
00 &
\end{array}$$

Luego log $8346,875 = 3,9215239$; el número buscado es por lo tanto igual á 8346,875.

468. Segundo caso. *Que el logaritmo dado siendo positivo no tenga* 3 *de característica.* Si el logaritmo no tiene la característica 3, se le aumenta ó disminuye el número de unidades suficiente para que resulte la característica 3, se halla el número correspondiente á este logaritmo, segun el caso anterior, con tres cifras decimales, y en seguida se corre la coma á derecha ó izquierda tantos lugares como unidades se le quitaron ó aumentaron á la característica.

Conviene hacer siempre que la característica sea 3, porque de ese modo se halla por las tablas el mayor número de cifras decimales.

Sea, por ejemplo, hallar el número correspondiente al logaritmo 5,5321784. Quitando 2 unidades á la característica, obtendremos el logaritmo 3,5321784, que corresponde, segun el caso anterior, al número 3405,480; luego el logaritmo propuesto corresponderá al número 340548, que se obtiene corriendo la coma á la derecha dos lugares, por ser dos las unidades que se disminuyeron á la característica 5 para que se redujese á 3.

Del mismo modo se hallará que el número correspondiente al logaritmo 0,5321784, es 3,40548.

469. Tercer caso. *Que el logaritmo tenga negativa la característica.* Si el logaritmo dado tiene la característica negativa, se le añaden tantas unidades cuantas sean necesario para hacer que dicha característica sea positiva é igual á 3; se halla el número correspondiente segun el caso anterior, con tres cifras decimales; y por último se corre la coma hácia la izquierda tantos lugares como unidades se le agregó á la característica.

470. Cuarto caso. *Que todo el logaritmo sea negativo.* Puede este caso reducirse al tercero agregando un cierto número de unidades para que el logaritmo resulte positivo y con una característica igual á 3; se halla el número correspondiente, y despues se corre la coma tantos lugares como unidades se agregaron.

Tambien se puede hallar directamente el número como si fuera positivo el logaritmo dado, y despues, partiendo la unidad por el número hallado, se tendrá el número pedido (454).

LECCION LI.

Complemento aritmético: uso que de él se hace en el cálculo logarítmico. — Cálculo logarítmico. — Observaciones respecto á los incrementos de los logaritmos.

Complemento aritmético: uso que de él se hace en el cálculo logarítmico.

471. *Se llama* COMPLEMENTO *de un número, lo que le falta á éste para ser igual á la unidad del órden inmediato superior al mayor que el número contiene.*

Así, el complemento del número 3748 es 6252, número que le falta al primero para valer 10 000, unidad del órden inmediato superior al mayor del número que son millares.

Para hallar el complemento de un número, se resta la primera cifra de 10 y todas las demas de 9; el número que resulte será el complemento. El complemento del número 2,7325 será 7,2675.

El uso de los complementos es de una grande utilidad, sobre todo en el cálculo logarítmico. Sucede con mucha frecuencia en las aplicaciones de los logaritmos, que el resultado de una operacion se obtiene por medio de adiciones y sustracciones hechas con logaritmos, las cuales vienen á sustituirse por una suma, haciendo uso de los complementos.

Supongamos que para obtener un cierto resultado N, se tiene que ejecutar con los logaritmos l, l_1, l_2, l_3, l_4 ... la serie de operaciones

$$N = l + l_1 - l_2 - l_3 + l_4 - l_5 + l_6.$$

Si reemplazamos por los logaritmos que se han de restar, que son l_2, l_3, l_5, las cantidades $10 - l_2$, $10 - l_3$, $10 - l_5$, que son los complementos, habremos aumentado el resultado en tantas decenas como complementos se consideran; es decir, como números habiamos de restar, de modo, que quitando del resultado el mismo número de decenas, obtendremos el resultado final pedido.

Así, representando por c, c', c'' los complementos de los números anteriores, hallaremos para valor de N la expresion

$$N = l + l_1 + c + c' + l_4 + c'' + l_6 - 30,$$

lo cual nos prueba que para obtener un resultado compuesto de varios logaritmos que han de ser sumados, y otros que se deban restar, se suman con los primeros los complementos de los segundos, y del resultado se quitan tantas decenas como complementos hay.

Cálculo logarítmico.

472. Multiplicacion y division. Se trata de hallar el valor de la expresion $x = \frac{347}{1193} \times \frac{1065}{272} \times \frac{128}{397}$.

Segun las propiedades de los logaritmos, se tendrá (437 y 440) haciendo uso de los complementos:

$$\log x = \log 347 - \log 1193 + \log 1065 - \log 272 + \log 128 - \log 397$$

$$\begin{array}{rl}
\log\ 347 = & 2,5403295 \\
\text{comp.}\ \log 1193 = & 6,9233596 \\
\log 1065 = & 3,0273496 \\
\text{comp.}\ \log\ 272 = & 7,5654311 \\
\log\ 128 = & 2,1072099 \\
\text{comp.}\ \log\ 397 = & 7,4012095 \\
\hline
 & 29,5648892 \\
\text{luego} \qquad \log x = & \bar{1},5648892
\end{array}$$

$$\log x \times 10^4 = 3,5648892$$
$$\log\ 3671 = 3,5647844$$

$$\begin{array}{r|l}
D = 10480 & 1183 = \Delta \\
\cline{2-2}
10160 & 0,885 \\
6960 & \\
1055 &
\end{array}$$

$$\log\ 3671,885 = 3,5648892$$
$$x \times 10^4 = 3671,885$$
$$x = 0,3671885$$

Efectuando este cálculo directamente sin hacer uso de los complementos, hallaremos

$$\begin{array}{rl}
\log\ 347 = & 2,5403295 \\
\log\ 1065 = & 3,0273496 \\
\log\ 128 = & 2,1072099 \\
\hline
 & 7,6748890 \\
 & 8,1099998 \\
\hline
\log x = & -0,4351108 \\
\log x\ .\ 10^4 = & 3,5648892,
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
\log 1193 = & 3,0766404 \\
\log\ 272 = & 2,4345689 \\
\log\ 128 = & 2,5987905 \\
\hline
 & 8,1099998
\end{array}$$

de donde se deduce como anteriormente $x = 0,3671885$.

473. Formacion de potencias. Sea, por ejemplo, hallar la *octava* potencia del número 23. Segun el número 439, se tendrá llamando x al resultado, $\log x = \log (23)^8 = 8 \times \log 23$.

$$\begin{array}{rl}
\text{Log}\ 23 = & 1,36172784 \\
8 \times \log 23 = & 10,8938227 \\
\log \dfrac{x}{10^7} = & 3,8938227 \\
\log 7831 = & 3,8938172
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
D = 5500 & 555 = \Delta \\
\cline{2-2}
5050 & 0,099 \\
55 &
\end{array}$$

$$\log 7831,099 = 3,8938227;$$

luego $$\frac{x}{10^7} = 7831,099,$$

de donde $$x = 78310990000 = (23)^8$$

con un error menor que una unidad de quinto órden.

474. Extraccion de raices. Hallar la raiz séptima del número 3785. Segun el número 441, se tendrá, llamando x al resultado, $\log x = \log \sqrt[7]{3785} = \frac{1}{7} \log 3785.$

$$\begin{array}{lrl}
\text{Log} & 3785 = & 3,5780659 \\
\frac{1}{7}\log & 3785 = & 0,5111522 \\
\log x \times 10^3 & = & 3,5111522 \\
\log & 3244 = & 3\ 5110808
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
D = 7140 & 1339 = \Delta \\ \hline
4450 & 0,533 \\
4330 & \\
313 &
\end{array}$$

$$\log 3244,533 = 3,5111522;$$

luego $$x \times 10^3 = 3244,533,$$

de donde $$x = 3,244533 = \sqrt[7]{3785}.$$

475. Apliquemos, por último, y como recopilacion de todo lo dicho, el cálculo logarítmico á la determinacion del valor de una expresion numérica, y sea, por ejemplo, hallar el valor de

$$x = \sqrt[\frac{1}{0,6}]{\frac{832 \times \sqrt[3]{479} \times (2,5)^5}{(34)^3 \times \sqrt[5]{71\frac{2}{3}}}}.$$

En primer lugar, tomando logaritmos, tendremos

$$\log x = 0,6\left(\log\left(832 \times \sqrt[3]{479} \times (2,5)^5\right) - \log\left((34)^3 \times \sqrt[5]{71\tfrac{2}{3}}\right)\right)$$

$$\log x = 0{,}6\left(\log 832 + \tfrac{1}{3}\log 479 + 5.\log 2{,}5 - \left(3\log 34 + \tfrac{1}{5}\log 215 - \tfrac{1}{5}\log 3\right)\right)$$

$$\begin{array}{lrl}
\log & 832 = & 2{,}92012333 \\
\frac{1}{3}\log & 479 = & 0{,}89344517 \\
5.\log & 2{,}5 = & 1{,}98970005 \\
\frac{1}{5}\log & 3 = & 0{,}09542425 \\
\hline
 & & 5{,}89869280 \\
 & & 5{,}06092445 \\
\hline
 & & 0{,}83776835 \\
 & & \times 0{,}6 \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lrl}
3.\log & 34 = & 4{,}59443676 \\
\frac{1}{5}\log & 215 = & 0{,}46648769 \\
\hline
 & & 5{,}06092445
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\log x & = 0{,}5026610 \\
\log x\,.\,10^3 & = 3{,}5026610 \\
\log\ 3181 & = 3{,}5025637
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
D = 9730 & 1365 = \Delta \\
\hline
1750 & 0{,}712 \\
3850 & \\
1120 &
\end{array}$$

$$\log 3181{,}712 = 3{,}5026610;$$

luego $\qquad x\,.\,10^3 = 3181{,}712,$

de donde $\qquad x = 3{,}181712.$

Observaciones respecto á los incrementos de los logaritmos.

476. Si examinamos en las tablas de logaritmos la columna de las diferencias, observaremos que estas diferencias van constantemente disminuyendo; así, los logaritmos de los números 1837 y 1838, se diferencian en 2363 unidades del séptimo órden decimal, miéntras que la diferencia de los números 9375 y 9376 es 463 unidades del mismo órden.

La razon es bien sencilla; en efecto, sean a y $a+1$ dos números enteros consecutivos, y se tendrá

$$\log(a+1) - \log a = \log\left(\frac{a+1}{a}\right) = \log\left(1+\frac{1}{a}\right);$$

pero á medida que a aumenta, $1+\frac{1}{a}$ tiende hácia la unidad; luego la diferencia tabular tiende á valer $\log 1 = 0$.

Si los números reciben un incremento constante h, los logaritmos se diferenciarán en

$$\log(a+h) - \log a = \log\left(\frac{a+h}{a}\right) = \log\left(1+\frac{h}{a}\right),$$

cuya diferencia será tanto menor, cuanto mayor sea el número a.

Si la relacion del número al incremento fuera constante, es decir, si $\frac{h}{a}$ fuese una cantidad constante k, la diferencia de los logaritmos seria tambien constante é igual á $\log(1+k)$.

477. Hemos supuesto, al hallar el logaritmo de un número mayor que el mayor de las tablas (464), que los incrementos de los logaritmos son proporcionales á los de los números, lo cual evidentemente no es exacto. En efecto, si al número a se le da un incremento d, su logaritmo recibirá otro Δ; si damos ahora al número $a+d$ el mismo incremento d, el logaritmo recibirá tambien un nuevo incremento algo menor que el primero, segun lo dicho anteriormente; así, cuando el incremento del número se ha hecho doble, el del logaritmo es un poco menor que el doble; y al contrario, cuando el incremento de un número se ha hecho mitad, el del logaritmo es un poco mayor que la mitad. De donde se deduce, que al hacer uso de esta proporcion en el primer problema, se hallan resultados menores que los verdaderos; y al pasar de los logaritmos á los números, los resultados son mayores.

Para calcular el límite del error que se comete por el empleo de esta proporcion, se necesita el conocimiento de las series, de las cuales nos ocupamos en el álgebra superior.

APÉNDICE.

SISTEMAS DE NUMERACION.

LECCION PRIMERA.

Teoría de los diferentes sistemas de numeracion. — Sistema duodecimal. — Traduccion de un número entero escrito en un sistema de base B, á otro sistema de base B′.

Teoría de los diferentes sistemas de numeracion.

1. El artificio de que nos valemos para expresar, ya sea verbalmente, ya por escrito, un número entero en el sistema ordinario ó decimal, puede ser aplicado á otro sistema cualquiera cuya base sea distinta de 10. Así, pues, conviniendo, como se hace en el sistema ordinario, en que un número entero cualquiera se divida en general en unidades de distinto órden, y que cada una se forme de tantas del inmediato inferior como unidades tiene la base; y ademas, admitiendo que cada cifra colocada á la izquierda de otra represente unidades de un órden superior al que ésta indica, podremos sin dificultad alguna expresar, ya sea de palabra ó por escrito, cualquier número entero en un sistema de base cualquiera.

Varios son los que se han ocupado de la teoría de los diferentes sistemas de numeracion, con el objeto de ver si debia ó no adoptarse un nuevo sistema que pudiera reemplazar con ventaja al decimal; pero todos han convenido en que si bien el sistema *duodecimal* pudiera ser más conveniente que el actual, serian tales los perjuicios y las dificultades materiales que ocasionaria el inmenso trastorno de todo lo existente, que de ningun modo se debe imaginar siquiera el verificar semejante cambio.

La teoría de los diferentes sistemas de numeracion sólo puede tener en la actualidad un interes científico de más ó ménos consideracion, y nosotros ni aun le dariamos la extension que en este apéndice le damos si programas oficiales de algunas de nuestras escuelas no lo exigieran así.

2. Si tratásemos de plantear un sistema cualquiera de numeracion, principiariamos por dar nombres sencillos á los números formados, segun sabemos, por el aumento sucesivo de la unidad desde el *uno* hasta aquel que precede al número de la *base*, al cual llamaremos siempre *diez*, constituyendo al mismo tiempo la unidad de segundo órden. La reunion de otras tantas unidades de segundo órden formarian la de tercero, que llamariamos *ciento*, y así sucesivamente iriamos obteniendo las unidades de cuarto, quinto, etc. órden, que nombrariamos con las palabras *mil*, *diez mil*, etc.

De esta primera regla se deduce, que si la base del sistema que tratamos de formar es menor que la base 10 del actual, no hay necesidad de inventar cifras ni palabras que expresen ó representen los números que hay entre *uno* y la *base*, pues pueden servir las que tenemos, quedando inútiles las que hay despues de esta *base* hasta el número *nueve*. Así, siendo la base del sistema 7, por ejemplo, las palabras y cifras necesarias para los números arriba citados serian

1	2	3	4	5	6
uno,	*dos*,	*tres*,	*cuatro*,	*cinco*,	*seis*;

el siguiente, que es la base, seria *diez;* de modo que en el nuevo sistema los números ordinarios siete, ocho, nueve, diez, once, doce, trece y catorce, serian *diez*, *diez y uno*, ú once, *diez y dos*, ó doce, *diez y tres*, ó trece, *diez y cuatro*, ó catorce, *diez y cinco*, ó quince, *diez y seis*, y *veinte*. El número cuarenta y nueve seria el *ciento* en el nuevo sistema, y así de los demas.

Si la base fuera mayor que *diez*, tal como *quince*, habria que inventar cinco cifras con sus cinco nombres para representar los números *diez*, *once*, *doce*, *trece* y *catorce;* el *quince* seria el *diez* del nuevo sistema, el *diez y seis* seria el *diez y uno*, ú once, y así sucesivamente.

Como cada número de los que hay entre el *uno* y la base se representa por una sola cifra, la cual tiene su nombre correspondiente, y ademas se usa de la cifra *cero* con el objeto indicado en el sistema de numeracion ordinario, de aquí que el número de cifras que se debe considerar en cualquier sistema, es siempre igual al número que indica la *base:* así en el sistema decimal cuya base es *diez*, se necesitan 10 cifras; en el sistema ternal ó ternario, sólo se necesitarán 3; en el sistema duodecimal ó de base *doce*, se necesitarán 12 cifras.

Con el objeto de comprender bien esta teoría general, explicaremos un sistema distinto del ordinario, tal como el duodecimal, y todo cuanto de él digamos podrá aplicarse á otro sistema cualquiera.

Sistema duodecimal.

3. Numeracion hablada. Siguiendo una marcha análoga á la expuesta en el sistema de numeracion decimal, se hallará que partiendo del número *uno*, se obtendrán por el aumento sucesivo de la unidad los números *dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, dice, trice,** y *diez*.

La reunion de diez (*doce*) unidades se considera como una nueva unidad llamada de *segundo órden* ó *decena*, y se cuenta por decenas lo mismo que por unidades, diciendo: una decena, dos decenas, tres decenas, etc., las que se expresan con los nombres *diez, veinte, treinta*, ... *noventa, dicenta, tricenta*, y diez decenas ó *ciento*. Donde vemos que los nombres de los diez (*doce*) primeros números terminados en *enta* nos expresan el mismo número de unidades de segundo órden; por ejemplo, *ochenta* que es el *ocho* terminádo en *enta* nos indica ocho decenas, *tricenta* que es el *trice* terminado en *enta* nos indica *trice* (once) decenas. Se exceptúan de esta regla *diez, veinte* y *ciento*, que como se ve corresponden á una, dos y diez (*doce*) decenas, y que no están terminados en *enta*.

Entre cada dos colecciones de decenas (*docenas*) hay *trice* (once) números cuyos nombres se forman añadiendo al de la coleccion inferior los de los trice (*once*) primeros; así los comprendidos entre *dicenta* y *tricenta*, serán dicenta y uno, dicenta y dos, etc., hasta dicenta y trice (*ciento treinta y uno*).

La reunion de diez (*doce*) decenas, ó sean *cien* (*ciento cuarenta y cuatro*) unidades, se considera como una nueva unidad llamada de *tercer órden* ó *centena*, y se cuenta por *centenas* lo mismo que por unidades diciendo: *un ciento, dos cientos, ... dicientos, tricientos, ...* y *diez cientos* que se expresa con la palabra *mil*.

La reunion de diez (*doce*) centenas se considera como una nueva unidad llamada de *cuarto órden* ó *millar*, y se cuenta por *millares, decenas de millar* y *centenas de millar*, lo mismo que se ha contado por unidades, decenas y centenas simples; dando orígen así á otros dos órdenes de unidades que son las de *quinto* y *sexto*.

La reunion de *diez* (doce) *centenas de millar* componen la unidad de *séptimo órden* ó *millon*, de la cual se forman otros seis órdenes que son *millon, decena de millon*, etc., y que corresponden á los órdenes respectivos *séptimo, octavo, noveno, dizavo* (décimo), *trizavo* (undécimo) y *décimo* (dozavo).

El conjunto de *diez* (doce) *centenas de millar de millon* forman el *billon*, y se cuenta por *billones, trillones*, etc., del mismo modo que por millones y unidades simples.

4. De aquí resultan dos clases de unidades: unas que llamaremos *principales* que son las de *primer órden*, del *séptimo* ó *millones*, del *undécimo* (décimo tercio) ó billones, del *diez* y *siete* (diez y nueve) ó trillones, etc., las cuales se reproducen de seis en seis; y otras inter-

(*) Las palabras *dice* y *trice* las adoptamos para los números que en el sistema decimal se llaman *diez* y *once*.

medias que son las *decenas*, *centenas*, *millares*, *decenas de millar* y *centenas de millar* de cada uno de estos órdenes principales.

5. NUMERACION ESCRITA. Hemos visto ya que en un sistema cualquiera se necesitan, contando con el *cero*, tantas cifras como unidades tiene la *base* del sistema: así en el sistema duodecimal se necesitarán *diez* (doce), y como en el sistema ordinario no tenemos más que diez, tendremos necesidad de adoptar dos más correspondientes á los números *dice* (diez), y *trice* (once); de modo que conviniendo en que estas cifras sean las primeras letras del alfabeto griego, se tendrá que las cifras empleadas en el sistema *duodecimal* son:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	α	β
cero,	*uno,*	*dos,*	*tres,*	*cuatro,*	*cinco,*	*seis,*	*siete,*	*ocho,*	*nueve,*	*dice* y	*trice.*

Conviniendo, como en el sistema ordinario, en que cada una de estas cifras tengan dos valores, uno *absoluto* que es el que representa por su figura, y otro *relativo* al lugar que ocupe; conviniendo ademas en que *una cifra escrita á la izquierda de otra, nos exprese unidades del órden inmediato superior al que ésta representa,* podremos escribir en este sistema un número entero cualquiera.

Segun el convenio anterior, se deduce que si un número se compone de varias cifras, la primera de la derecha serán unidades simples; la segunda *decenas* ó unidades de *segundo* órden, la tercera *centenas* ó unidades de *tercer órden*, y así sucesivamente. De modo que si el número que se quiere escribir contiene todos los órdenes de unidades que hay desde el primero hasta el superior, no habrá dificultad en hacerlo, pues bastará *ir colocando las cifras que nos expresen las unidades de cada especie, unas á continuacion de otras conforme se vayan pronunciando.*

Sea, por ejemplo, escribir el número *ocho mil cuatro cientos tricenta millones quinientos veinte y dice mil tricientos sesenta y cuatro unidades.*

Colocando las cifras en el órden que se han pronunciado, obtendremos el número escrito en cifra

$$84\beta 52\alpha\beta 64.$$

Ocupando con ceros los órdenes de unidades que falten en un número y con las cifras significativas correspondientes á los que se nombren, se tendrá escrito un número cualquiera.

Sea, por ejemplo, escribir el número *ochocientos dicenta y trice billones seiscientos tres mil quinientos tricenta millones sesenta y trice mil ochenta y dice.*

Colocando cada cifra en su correspondiente lugar, ocupando con ceros los órdenes que faltan, se tendrá

$$8\alpha\beta 6035\beta 006\beta 08\alpha.$$

Del mismo modo que en el sistema decimal veriamos que el número

$$35{,}407.\alpha00{,}7\beta0.3\alpha0{,}0\alpha7$$

se lee en el lenguaje ordinario del modo siguiente:

Treinta y cinco mil cuatrocientos siete billones dicientos mil setecientos tricenta millones trescientos dicenta mil dicenta y siete.

Traduccion de un número entero escrito en un sistema de base B, á otro sistema de base B'.

6. *Para escribir en un sistema cualquiera un número escrito en el sistema decimal, se divide por la base el número propuesto y los cocientes sucesivos, hasta llegar á uno que sea menor que dicha base; los restos que se obtengan serán las cifras respectivas de los diferentes órdenes de unidades del número escrito en el sistema propuesto.*

En efecto, sea N el número escrito en el sistema decimal, y B la base del sistema á que se quiere referir. Como en el sistema cuya base es B, cada unidad de segundo órden se compone de B unidades de primero, cuantas veces el número B esté contenido en el número N, tantas unidades de segundo habrá; luego dividiendo N por B, el cociente Q serán unidades de segundo órden: el resto de la division, siendo menor que B, tendrá una cifra que lo represente, la cual será la de las unidades de primer órden del número.

Dividiendo el cociente Q por B, el nuevo cociente entero Q' que hallemos nos expresará las unidades de tercer órden; el resto serán las unidades de segundo, y así sucesivamente.

Ejemplo. Escribir en el sistema *duodecimal* el número 1798.

La operacion se dispondrá así:

1798	12		
59	149	12	
118	29	12	12
10	5	0	1

Por consiguiente el número 1798 escrito en el sistema duodecimal, es 105α.

7. *Para escribir en el sistema decimal un número escrito en cualquier sistema, se multiplica por la base la cifra del órden superior, al producto se agrega la cifra siguiente, el resultado se vuelve á multiplicar por la base, se agrega la cifra siguiente, y así se continúa hasta haber agregado la cifra de las unidades de primer órden.*

Sea un número *dcba* escrito en un sistema cuya base es B: cada unidad de un órden cualquiera se forma de B unidades del inmediato inferior; luego *d* unidades de cuarto órden se formarán de *d*B de tercero, de modo que se tendrán $dB + c$ unidades de tercer órden: multiplicando este resultado por B, y añadiendo la cifra b tendremos las unidades de segundo órden de que consta el número, y por último, multiplicando el resultado que se obtiene por la misma base B y añadiendo la cifra a de las unidades, tendremos el número escrito en el sistema decimal.

Ejemplo. Escribir en el sistema *decimal* el número 105α escrito en el duodecimal.

Efectuando los cálculos indicados anteriormente, se tiene

$$[(1\times 12+0)\times 12+5]\times 12+10=(12\times 12+5)\times 12+10=$$
$$149\times 12+10=1798.$$

Luego el número 105α escrito en el sistema duodecimal, equivale á 1798 escrito en el decimal.

8. *Para escribir en el sistema cuya base es* B *un número escrito en el sistema* B′ *se escribe primero el número en el sistema decimal, y despues se pasa del decimal al sistema cuya base es* B.

9. En general, si representamos por a, b, c, d, e, f... las cifras de un número escrito en el sistema cuya base es B, dicho número tendrá por expresion en el sistema de base B, puesto que $B=10$,

$$N=\dots fedcba=a+10b+10^2c+10^3d+10^4e+10^5f+\dots$$

Este mismo número tendrá por expresion en el sistema ordinario ó decimal

$$N=a+Bb+B^2c+B^3d+B^4e+B^5f+\dots$$

Las reglas para pasar de uno á otro sistema son las expuestas anteriormente.

LECCION II.

Cálculo de los números enteros escritos en un sistema cualquiera. — Fracciones en un sistema cualquiera análogas á las decimales del sistema ordinario.

Cálculo de los números enteros escritos en un sistema cualquiera.

10. El cálculo de los números enteros escritos en un sistema cuya base es B, se hace como en el sistema ordinario, teniendo presente que cada unidad de un órden cualquiera equivale á B de la especie inmediata inferior.

Veamos cómo se verifica el cálculo en un sistema cualquiera, en el *duodecimal* por ejemplo, y del mismo modo se haria en otro cualquiera.

Para mayor facilidad deberiamos anteponer á cada operacion la tabla correspondiente, como se hace en el sistema decimal cuando por primera vez se estudia; pero nosotros sólo expondremos la más necesaria, cual es la de multiplicar.

11. Adicion. Sea, por ejemplo, efectuar la suma de los números enteros que figuran al márgen, escritos en el sistema de *doce* cifras.

$$\begin{array}{r} 5\alpha7 \\ \beta83 \\ 67\beta \\ 29\alpha \\ 7\beta6 \\ \hline 2\beta01 \end{array}$$

Como la suma se practica lo mismo que en el sistema ordinario ó decimal, y sólo tenemos que atender á la circunstancia especial de que cada unidad se compone de *doce* de la especie inferior, hallaremos el resultado del modo siguiente: 7 y 3, α (diez); α y β, 19 (veinte y uno); 19 y α, 27 (treinta y uno); 27 y 6, 31 (treinta y siete), cuyo número compone 1 unidad de primer órden, que escribimos en su lugar, y 3 de segundo que se reservan para sumarlas con las de su especie, diciendo: 3 y α, 11 (trece); 11 y 8, 19 (veinte y uno); 19 y 7, 24 (veinte y ocho); 24 y 9, 31 (treinta y siete); 31 y β, 40 (cuarenta y ocho). Del número 40 escribimos el cero en su lugar, y las 4 unidades de tercer órden se reservan para sumarlas con las de su especie, lo cual nos da: 4 y 5, 9; 9 y β, 18 (veinte); 18 y 6, 22 (veinte y seis); 22 y 2, 24 (veinte y ocho); 24 y 7, 2β (treinta y cinco), cuyo número escrito en su lugar nos da la suma $2\beta01$, que se lee *dos mil tricientos uno*.

12. Sustraccion. Sea restar $37\alpha9\beta8$ de $9860\alpha3$ en el sistema de *doce* cifras.

$$\begin{array}{r} 9860\alpha3 \\ 37\alpha9\beta8 \\ \hline 6072\alpha7 \end{array}$$

Dispuesta la operacion como al márgen se ve, diremos: 3 ménos 8, no puede ser; tomaremos una unidad del órden siguiente, que descompuesta en unidades simples da 10 (doce), y diremos: 13 (quince) ménos 8, 7; el α (diez) se convirtió en 9, del cual no se puede restar β; descomponiendo una unidad de cuarto órden, por no haberla de tercero, dejaremos β (once) en el tercer lugar, y la restante la descompondremos en 10 (doce) unidades de segundo, que agregadas á las 9 que hay resultará el número 19 (veinte y uno); restando de 19 la cifra β, hallaremos la resta α que colocamos en su lugar. El 0 se convirtió en β, de cuyo número, restando 9, hallamos la cifra 2 que colocamos en su lugar; continuando del mismo modo llegaremos á concluir la resta, cuyo resultado es $6072\alpha7$, que se lee, segun lo convenido, del modo siguiente: ***seiscientos siete mil doscientos dicenta y siete.***

13. Multiplicacion. Para poder efectuar con facilidad la multiplicacion de números escritos en un sistema cualquiera, conviene tener presente la tabla de multiplicar correspondiente; así principiaremos, puesto que venimos ejecutando los cálculos en el sistema duodecimal, estableciendo la tabla pitagórica correspondiente á este sistema.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	α	β
2	4	6	8	α	10	12	14	16	18	1α
3	6	9	10	13	16	19	20	23	26	29
4	8	10	14	18	20	24	28	30	34	38
5	α	13	18	21	26	2β	34	39	42	47
6	10	16	20	26	30	36	40	46	50	56
7	12	19	24	2β	36	41	48	53	5α	65
8	14	20	28	34	40	48	54	60	68	74
9	16	23	30	39	46	53	60	69	76	83
α	18	26	34	42	50	5α	68	76	84	92
β	1α	29	38	47	56	65	74	83	92	α1

Sea ahora, por ejemplo, multiplicar dos números cualesquiera 3α2β y 5α8. Dispuesta la operacion como en el sistema ordinario, y empleando la misma regla que allí se expuso, hallaremos $8 \times \beta = 74$, escribimos el 4, y las siete unidades las reservamos para sumarlas al producto parcial siguiente; $2 \times 8 = 14$, 14 y 7 son 1β; β y va una; $\alpha \times 8 = 68$ y 1 son 69; escribimos el 9 y quedan 6; $3 \times 8 = 20$, 20 y 6 son 26 que escribimos en su lugar, obteniendo así el producto parcial del multiplicando por la primera cifra del multiplicador.

$$\begin{array}{r} 3\alpha2\beta \\ 5\alpha8 \\ \hline 269\beta4 \\ 32652 \\ 17327 \\ \hline 1\alpha83\alpha14 \end{array}$$

Del mismo modo hallaremos los dos productos parciales 32652 y 17327 correspondientes á las cifras α y 5 del multiplicador. Sumando los tres productos parciales, hallamos el producto total 1α83α14.

14. División. La division es el análisis de la multiplicacion; la regla es la misma que en el sistema ordinario y se deduce del mismo modo.

Sea, por ejemplo, dividir 1α83α14 por 3α2β, en el sistema duodecimal.

Dispuesta la operacion del modo siguiente

$$\begin{array}{r|l} 1\alpha83\alpha,1,4 & 3\alpha2\beta \\ \cline{2-2} \underline{17327} & 5\alpha8 \\ 35131 & \\ \underline{32652} & \\ 269\beta4 & \\ \underline{269\beta4} & \\ 0 & \end{array}$$

hallaremos, siguiendo las reglas establecidas en el sistema decimal, el cociente 5α8.

15. Elevacion á potencias. Siendo la elevacion á potencias un caso particular de la multiplicacion, no necesitamos poner ejemplos que ejecutar, pues se haria como hemos visto en la multiplicacion.

16. Extraccion de raices. Las reglas para la extraccion de las raices cuadrada y cúbica en un sistema cualquiera, son las mismas que las expuestas en el sistema decimal, y por ellas se encontraria que la raiz cuadrada de 2α6230, es 5α6; y la cúbica de 11βαβ42β, es 24β, números escritos todos en el sistema duodecimal.

17. Sabiendo ejecutar las operaciones fundamentales de la aritmética en un sistema cualquiera, podrá resolverse directamente el problema de traducir un número de un sistema de base B, á otro de base B′, por la regla siguiente:

Para traducir un número entero cualquiera del sistema cuya base es B, *á otro de base* B′, *se divide el número y los cocientes sucesivos por la base del nuevo sistema expresada en el antiguo, y los restos sucesivos que encontremos serán las cifras del número pedido, el cual se obtendrá poniendo estas cifras de izquierda á derecha en un órden contrario al que se han hallado.*

Fracciones en un sistema cualquiera, análogas á las decimales del sistema ordinario.

18. Las fracciones *decimales* de un sistema cualquiera, que bien podremos llamarlas así despues de haber convenido en llamar siempre *diez* á la base del sistema, se obtienen absolutamente de la misma manera que en el sistema ordinario, y siguen las mismas reglas en su escritura, lectura y cálculo.

La conversion de fracciones ordinarias en fracciones decimales, se hace del mismo modo, y como en el sistema ordinario, se verifica que cuando el denominador de la fraccion ordinaria no contiene más factores primos que los de la base B, se puede reducir exactamente en fraccion continua; y siempre que el denominador contenga factores extraños á los de la base, la fraccion decimal equivalente será ilimitada, periódica pura si dicho denominador es primo con B, y periódica mixta si ademas de contener factores de la base, contiene alguno extraño.

La fraccion ordinaria $\frac{7}{18}$ escrita en el sistema de 12 cifras, será $\frac{7}{16}$, y ésta convertida en fraccion decimal correspondiente, será

$$\begin{array}{r|l} 70 & 16 \\ \underline{60} & \overline{0{,}48} \\ 100 & \\ \underline{100} & \\ 0 & \end{array}$$

donde vemos que la fraccion ordinaria propuesta es equivalente en la fraccion decimal del sistema cuya base es *doce*, 0,48.

Del mismo modo veremos que la fraccion ordinaria $\frac{3}{5}$ cuyo denominador es primo con la base 10 (doce) del sistema, convertida en *decimal* da orígen á la fraccion periódica 0,72497249 ..., y la fraccion ordinaria $\frac{7}{10}$ que en el sistema de *doce* cifras se escribe $\frac{7}{\alpha}$ y cuyo denominador α contiene el factor primo 2 de la base y el 5 diferente, convertida en fraccion *decimal* dará una fraccion periódica mixta igual á 0,849724972...

Las reglas para convertir fracciones decimales de un sistema cualquiera á fracciones ordinarias, son las mismas que las dadas en el sistema ordinario. Así, las fracciones decimales anteriores tendrán por generatrices respectivas

$0,48=\frac{48}{100}=\frac{24}{60}=\frac{12}{30}=\frac{7}{16}$, que equivale á $\frac{7}{18}$ en el sistema decimal,

$$0,72497249\ldots=\frac{7249}{\beta\beta\beta\beta}=\frac{3}{5},$$

cuya simplificacion se ha hecho buscando el máximo comun divisor 2497 de los números 7249 y ββββ escritos en el sistema de doce cifras, y dividiendo por él.

Por último, se tiene que

$$0,849724972\ldots=\frac{84972-8}{\beta\beta\beta\beta 0}=\frac{84966}{\beta\beta\beta\beta 0}=\frac{7}{\alpha}$$

equivalente esta última fraccion á la ordinaria $\frac{7}{10}$ del sistema actual.

LECCION III.

Divisibilidad en un sistema cualquiera. — Aplicacion de la teoría de los diferentes sistemas de numeracion. — Comparacion entre los sistemas de numeracion decimal y duodecimal.

Divisibilidad de un sistema cualquiera.

19. Los caractéres de divisibilidad de un número por otro en un sistema cualquiera, se deducen de la misma manera que lo hemos hecho en el sistema ordinario, si bien es cierto que estos caractéres varian de un sistema á otro al mismo tiempo que varía la base.

Así, pues, prescindiendo de las demostraciones, porque serian idénticas á las dadas al ocuparnos de esta teoría en nuestro sistema ordinario, diremos que:

1.° *Para que un número sea divisible por un factor de la base, es necesario que su última cifra de la derecha lo sea tambien.*

2.° *Para que un número sea divisible por la enésima potencia de un factor de la base, es necesario que el número formado por las* n *últimas cifras de la derecha lo sea tambien.*

3.° *Para que un número sea divisible por* $B-1$ *ó por un factor primo de* $B-1$, *siendo* B *la base del sistema, es necesario que la suma del valor numérico de sus cifras sea divisible tambien por* $B-1$ *ó por el factor primo de* $B-1$, *cuyo carácter de divisibilidad buscamos.*

4.° *Para que un número sea divisible por* $B+1$, *ó por un factor primo de* $B+1$, *siendo* B *la base del sistema, es necesario que la suma de las cifras de lugar par, ménos la suma de las de lugar impar, sea cero, ó divisible por* $B+1$, *ó por el factor de* $B+1$ *cuyo carácter de divisibilidad buscamos.*

20. En general si representamos por a, b, c, d, e, etc. las cifras de un número entero N, escrito en un sistema de base B, y por 1, r, r', r'', r''', etc. los diferentes restos que se obtienen de dividir por n las potencias sucesivas de la base B, principiando por 1, se tendrá que *el número* N *será divisible por* n *siempre que la suma algebráica*

$$a \pm rb \pm r'c \pm r''d \pm r'''e \pm \ldots$$

sea cero ó divisible por el número n.

La demostracion es la misma que se dió en el sistema ordinario, Leccion X.

Segun esto, diremos que en el sistema de *doce* cifras un número será divisible por 2, 3, 4 ó 6, siempre que la cifra de las unidades sea *cero* ó divisible por estos números.

Será divisible por 9, 14 (diez y seis), 30 (treinta y seis), siempre que sus dos últimas cifras sean *ceros* ó formen un número divisible por 9, 14 ó 30.

Un número será divisible por β (once) siempre que la suma del valor numérico de sus cifras lo sea tambien.

Un número será divisible por 11 (trece) siempre que la suma de las cifras de lugar impar, ménos la suma de los de lugar par, sea *cero* ó divisible por 11.

Aplicando la fórmula general anterior para saber cuándo un número entero es divisible por otro número cualquiera, hallaremos, que un número entero escrito en el sistema de *doce* cifras será divisible por 7, cuando separando la cifra de las unidades y dividiendo lo que queda en períodos de tres cifras, y multiplicando éstas respectivamente por los números 2, 3, 1, la suma de los productos de los períodos de lugar impar (contando como tal la cifra separada de las unidades), ménos la suma de los productos de los períodos de lugar par, sea cero ó divisible por 7.

En efecto, las diferentes restas que se obtienen al dividir por 7 las potencias sucesivas de la base, son

$$1,\ 5,\ 4,\ 6,\ 2,\ 3,\ 1,\ 5,\ 4,\ \text{etc.};$$

tomando los complementarios de aquellos que pasan de la mitad de 7, se tendrá la nueva serie de restos

$$1,\ -2,\ -3,\ -1,\ 2,\ 3,\ 1,\ -2,\ -3,\ -1,\ \text{etc.};$$

luego si representamos por a, b, c, d, e, f, etc. las cifras de un número N escrito en el sistema de *doce*, se hallará para condicion de divisibilidad de N por 7, que la suma algebráica

$$a - 2b - 3c - d + 2e + 3f + g - 2h - \text{etc.}$$

ha de ser *cero* ó divisible por 7; lo cual está conforme con la regla.

Aplicacion de la teoria de los diferentes sistemas de numeracion.

21. Por medio de la teoría de los diferentes sistemas de numeracion pueden demostrarse algunas propiedades de los números.

En efecto, de poderse escribir un número cualquiera en el sistema *binario* ó sea de dos cifras, se deduce que *todo número par es una suma de potencias de 2; y todo número impar una suma de potencias de 2, más la unidad.*

Efectivamente, todo número N cuyas cifras son a, b, c, d... escrito en un sistema cuya base es B, se puede escribir así:

$$N = a + Bb + B^2c \times B^3d + B^4e + \ldots;$$

de modo que el número N escrito en el sistema binario, será

$$N = a + 2b + 2^2c + 2^3d + 2^4e + \ldots$$

y como en este sistema las cifras no pueden ser más que 0 y 1, la expresion de N quedará reducida á la suma de potencias de 2, si a es cero; y á la suma de potencias de 2, más la unidad, en el caso de no serlo, lo cual se verifica siempre que N es impar.

22. Análogamente que en el número 96, demostrariamos en un sistema de base B, que una potencia cualquiera de B disminuida en una unidad es divisible por B — 1; y que toda potencia B^m de la base B aumentada ó disminuida de una unidad, segun que m sea par ó impar, es divisible por B + 1; de donde se podrá deducir:

1.° *Que* $B^m - 1$ *es siempre divisible por* $B - 1$ *cualquiera que sea el número* B.

2.° *Que* $B^m - 1$ *ó* $B^m + 1$ *es divisible por* $B + 1$, *segun que* m *sea par ó impar.*

22. Si observamos que

$$1000 - 1 = 999 = 37 \times 27 = 37 \times 3^3$$

y que

$$1000 + 1 = 1001 = 7 \times 11 \times 13,$$

y ademas que todo número del sistema ordinario, puede considerarse como escrito en el sistema de base *mil*, cuyas cifras serian los números que resultan de dividirle en secciones ó períodos de tres cifras, principiando por la derecha, podremos deducir:

1.° *Que un número cualquiera* N *escrito en el sistema decimal, será divisible por* 999, 37, 27, 9 *ó* 3 *siempre que lo sea la suma de los periodos que resultan de dividir el número de tres en tres cifras.*

2.° *Que un número cualquiera* N *escrito en el sistema decimal será divisible por* 1001, 13, 11 *ó* 7 *siempre que dividido en periodos de tres cifras, principiando por la derecha, la suma de los de lugar impar ménos la de los periodos de lugar par sea cero ó divisible por cualquiera de estos números.*

Comparacion entre los sistemas de numeracion decimal y duodecimal.

23. Terminaremos esta teoría haciendo una ligera comparacion entre los sistemas de *diez* y *doce* cifras.

Pudiendo ser, como en efecto lo es, arbitraria la eleccion de la base de un sistema de numeracion, parecia natural que los hombres al elegir la base de un sistema, se hubieran decidido por aquella que más ventajas reportara; sin embargo, al adoptar universalmente la base *diez*, no han debido tener esto en cuenta. La costumbre observada por todos los hombres en general de contar por los dedos de la mano, y siendo éstos en número *diez*, ha sido, sin duda, la causa de adoptar esta base; de aquí el orígen de los números dígitos, de *digitus* (dedo), y que se cuenten algunas cosas por *manos*, entendiéndose por una mano la reunion de *cinco* unidades, número igual al de dedos que tiene la mano.

Todos cuantos se han ocupado de la teoría de los diferentes sistemas de numeracion convienen en que, á pesar de ser arbitraria la eleccion de la base, ésta no debe ser ni muy grande ni muy pequeña, sino que debe hallarse comprendida entre ciertos límites. La eleccion de una base muy pequeña tendria el inconveniente de venir los números escritos con muchas cifras, y no se podrian someter á los cálculos con la sencillez y prontitud que se necesita. Por el contrario, la eleccion de una base demasiado grande permitiria escribir grandes números con pocas cifras; pero tendria el inconveniente de ser muchos los nombres y cifras que habria que aprender, siendo por consiguiente muy pesadas las tablas de que nos valemos para efectuar los cálculos. Así, la de multiplicar, que tanto trabajo cuesta aprender á los niños, costaria muchísimo más, y aun seria casi imposible si en vez de ser *diez* la base, fuera, por ejemplo, *ciento*. La primera exige aprender de memoria 40 productos distintos: la segunda exigiria 4900. No debiendo pasar la base de ciertos límites, segun las razones expuestas, resulta deber estar comprendida entre los números 8 y 15; y de los números comprendidos entre estos límites, evidentemente el 12 es el que por la propiedad de tener más divisores que ningun otro, es indudablemente el que debe preferirse.

Aunque las propiedades generales de los números no cambian con la base, sin embargo, de la eleccion de ésta puede depender que la cantidad pueda expresarse con más ó ménos exactitud, con más ó ménos sencillez, y en este concepto el sistema *duodecimal* lleva ventaja al *decimal;* pues por el primero es indudable que se pueden expresar con exactitud más cantidades que por el segundo.

Así, entre las fracciones que tienen la unidad por numerador, y la serie natural de los números desde 2 hasta 99 por denominador, 13 se pueden convertir exactamente en decimales, miéntras que en fracciones *duodecimales* se pueden convertir 19. Por tanto la medida de las cantidades se hace más fácilmente por el sistema duodecimal, habiendo más probabilidades de obtener por este sistema un número que exprese el valor de la cantidad con más sencillez y exactitud.

La ventaja del sistema duodecimal sobre el decimal se ha comprendido desde hace mucho tiempo, como lo prueban las divisiones y subdivisiones de las unidades antiguas, y la predileccion que este número ha tenido y tiene sobre los demas. Rara vez se cuenta en la vida comercial por decenas, miéntras que es muy frecuente hacerlo por *docenas* y *gruesas*, cuya unidad es una docena de docenas. El año se ha dividido en 12 meses; 12 son los signos del zodíaco; 12 los dígitos ó partes en que se divide el diámetro del sol y luna. El dia tiene dos veces 12 horas. La circunferencia se divide en 360 grados, que equivale á treinta veces 12, y los grados, minutos, segundos, etc., se dividen y subdividen en 60 partes, que equivale á cinco veces 12. Por último, hay quien apasionado con frenesí por el sistema duodecimal, alega la razon de que debe adoptarse el número 12 por base, no sólo por las ventajas materiales que pueda reportar, sino por ser este número, á juicio del autor á que me refiero, el *número predilecto de Dios*, como lo prueba el que fuesen 12 las tribus de Israel, 12 los profetas mayores, 12 los apóstoles; 12 los tonos mayores, y 12 los tonos menores de la música con que se cantan las alabanzas al Santísimo, etc., etc.

LECCION IV.

Método abreviado de la multiplicacion. — Método abreviado de la division. — Método abreviado de la extraccion de la raiz cuadrada y cúbica. — Ligeras nociones de geometría para comprender las unidades cuadradas y cúbicas del sistema de pesas y medidas.

Método abreviado de la multiplicacion.

24. En la multiplicacion de decimales, ocurre con frecuencia tener que hallar un producto con un grado de aproximacion menor que se obtendria empleando el método ordinario de la multiplicacion; por ejemplo, si el multiplicando tiene *siete* cifras decimales y el multiplicador *seis*, el producto obtenido por el método ordinario, vendria aproximado con *trece* cifras decimales; pero si sólo quisiéramos tener aproximado dicho producto en ménos de una unidad del *sexto* órden decimal, en vez de emplear el procedimiento ordinario, seguiremos el siguiente método abreviado:

25. *Para obtener en ménos de una unidad decimal de un órden dado, el producto de dos números, se escribe el multiplicando, despues se coloca la cifra de las unidades del multiplicador debajo de la cifra del multiplicando que expresa unidades cien veces menores que aquella que indica el grado de aproximacion del producto, y las demas cifras del multiplicador se escriben en un órden inverso.*

Despues se multiplica cada cifra del multiplicador por la parte superior del multiplicando á partir de la cifra que tiene encima aquella por la cual se multiplica. Se escriben todos los productos parciales unos debajo de otros de modo que se correspondan las primeras cifras de la derecha, y se efectúa la adicion de todos ellos. De la derecha de la suma se separan tantas cifras decimales, más dos, como ha de tener el resultado. Se suprimen las dos últimas, y se agrega una unidad á la primera cifra que queda en el producto. El resultado que así se obtiene, es el que se pide.

Sea, por ejemplo, hallar en ménos de una *milésima*, el producto de los números 3,1495273 y 23,325134.

Dispondremos la operacion del modo siguiente:

Multiplicando.	3,2495273
Multiplicador invertido. .	43 152432
	6 299054
	944856
	125980
	6298
	1570
	31
	9
	73,77798

Luego el producto de los dos números dados, aproximado en ménos de una milésima, es 73,778.

En efecto, al colocar la cifra de las unidades del multiplicador debajo de la que en el multiplicando expresa unidades cien veces menores que la que indica el grado de aproximacion, hacemos que el producto de dicha cifra por la parte superior del multiplicando, á partir de la cifra que tiene encima, exprese unidades cien veces más pequeñas que la que indica el grado de aproximacion, y como las demas cifras del multiplicador están escritas en un órden inverso, conseguimos que cada uno de los productos parciales sea tambien del mismo órden que el anterior; es decir, de unidades cien veces menores que las que indican la aproximacion pedida; porque si bien es cierto que cada cifra del multiplicando expresa unidades diez veces menores que la anterior á ella, tambien cada una del multiplicador expresa unidades diez veces mayores que la cifra que le antecede; por consiguiente el producto de cada cifra del multiplicando por la parte superior del multiplicador, á partir de la que tiene encima, expresa unidades cien veces menores que las que indican la aproximacion.

En cada producto parcial se comete un error menor que tantas centésimas del órden da la aproximacion, como unidades tiene la cifra por la cual se multiplica; luego el error que se cometerá en el producto, será menor que tantas centésimas del órden de la aproximacion, como unidades tiene la suma de las cifras empleadas en el multiplicador, y como esta suma en general no llega á valer *ciento* (*), el error cometido es menor que cien centésimas del órden de la aproximacion, es decir, menor que una unidad de este órden.

Despreciando las dos últimas cifras halladas, se comete tambien un error menor que una unidad del órden indicado; luego aumentando una unidad á la última cifra que queda en el producto, el error que se comete por exceso ó defecto, es menor que una unidad del último órden.

En el ejemplo presente, la suma de las cifras empleadas es

$$3 + 1 + 5 + 2 + 4 + 3 + 2 = 20;$$

las centésimas despreciadas del órden de la aproximacion son 98; luego el error cometido es $98 + 20 = 118$ centésimas del último órden; pero habiendo añadido á la primera cifra que queda en el producto una unidad, obtendremos el producto 73,778 que se diferencia del verdadero en ménos de 18 centésimas del último órden, y por lo tanto en ménos de media milésima.

(*) Si pasase dicha suma de *ciento*, en vez de colocar la cifra de las unidades del multiplicador debajo de la que en el multiplicando expresa unidades *cien* veces menores que aquella que indica la aproximacion, se colocará debajo de la inmediata inferior.

Método abreviado de la division.

26. *Para obtener, por un método abreviado en ménos de una unidad, el cociente de dos números dados* (*), *se marcan á la izquierda del divisor con una raga horizontal las cifras necesarias para que el número que representan, sea por lo ménos igual al doble de cifras que ha de tener el cociente multiplicado por 0,9; se cuentan á continuacion otras tantas como ha de tener el cociente ménos una, y se prescinde de todas las restantes.*

En seguida se suprimen de la derecha del dividendo tantas cifras, cuantas tenia el divisor ménos las marcadas; se divide, por el método ordinario, lo que queda á la izquierda del dividendo por el nuevo divisor, teniendo en cuenta en las multiplicaciones del cociente por el nuevo divisor, las unidades que provienen de la multiplicacion del cociente por la primera de las cifras que se borran.

Se divide el resto que se obtiene por el divisor que resulta de borrar á su derecha una nueva cifra, el cociente hallado se multiplica por este divisor y el producto se resta del dividendo correspondiente; se vuelve á borrar otra cifra, y así se continúa hasta emplear por divisor, la parte marcada á la izquierda del propuesto; y si esta última division parcial da un cociente mayor que 9, se modifica convenientemente la cifra anterior. El resultado obtenido es el cociente aproximado por exceso ó defecto, en ménos de una unidad.

Sea por ejemplo dividir el número 35478324375 por 8543276, cuya operacion dispondremos del modo siguiente:

35478|324375	$\overline{8}\dot{5}\dot{4}\dot{3}$|276
1306	4153
452	
25	
0	

Como el número de cifras que ha de tener el cociente es cuatro, sólo tendremos que marcar á la izquierda del divisor la primera cifra 8, pues $4 \times 2 \times 0,9$ es menor que dicha primera cifra: en seguida contamos tres cifras más, número igual á las que ha de tener el cociente ménos una, y se desprecian las tres restantes 2, 7 y 6.

Separadas de la derecha del dividendo las seis últimas cifras, número igual al que tiene el divisor ménos la primera que es la marcada, y hecha la division, hallamos la cifra 4 del cociente, que multiplicada por el nuevo divisor y restado su producto del dividendo, obtenemos la resta 1306; ésta se divide por 854, número que resulta despreciando la última cifra 3, por lo cual se la marca con un punto, y nos da la segun-

(*) Este método abreviado es debido á *M. Guy*.

da cifra 1 del cociente, que multiplicada por su divisor y restado el producto del dividendo correspondiente, nos da la segunda resta 452. Dividiendo 452 por el nuevo divisor que resulta de borrar la siguiente cifra 4, obtenemos la cifra 5 del cociente; multiplicando esta cifra por el divisor, añadiendo á este producto las 2 unidades que provienen de 5 por 4, cifra ya borrada, y restando el resultado del dividendo, hallamos la resta 25, la cual dividida por el último divisor, nos da la última cifra 3 del cociente.

El último resto es cero, que seguido de las cifras separadas en el dividendo, nos da un número menor que el divisor; luego el número hallado 4153 es el cociente entero aproximado en ménos de una unidad.

Demostracion. Sea A un dividendo, B un divisor, Q el cociente obtenido por la regla, y R el último resto seguido de las cifras separadas.

Como al restar de cada dividendo parcial el producto de la cifra del cociente por el divisor que le corresponde, restamos un producto menor que el verdadero, puesto que despreciamos una parte del divisor, en cada una de estas restas cometeremos un cierto error; de modo que si representamos por E la suma de los errores que se cometen, cuya suma debió restarse del dividendo total, se tendrá

$$A = BQ + R - E;$$

y dividiendo por B será $\frac{A}{B} = Q + \frac{R}{B} - \frac{E}{B}$.

De modo que si demostramos que $\frac{R}{B} - \frac{E}{B}$ es menor que la unidad, quedará demostrado que el número Q hallado segun la regla, es el cociente aproximado en ménos de una unidad por exceso ó defecto, segun que R sea $<$ ó $>$ E.

Para demostrar que $\frac{R}{B} - \frac{E}{B}$ es menor que la unidad, observaremos que *cada resto es menor que el divisor correspondiente.*

En efecto, el cociente de la primera division es *a* por ejemplo, y el producto de *a* por el divisor abreviado aumentado de las unidades que provienen de la primer cifra borrada si la hay, se ha de poder restar del dividendo correspondiente para que dicha cifra *a* sea exacta: ahora bien, si la resta que se obtiene fuese mayor que el divisor, seria señal que la cifra hallada por el método ordinario seria por lo ménos $a + 1$, y no *a* como habiamos supuesto; por consiguiente dicha primer resta es menor que el divisor correspondiente.

En cada una de las siguientes se comete un error á lo más igual á una unidad del último órden, que sólo influye por lo tanto en la primera ó dos primeras cifras de la derecha; por consiguiente, todas serán menores que sus divisores correspondientes; de modo que la penúltima podrá contener al último divisor una vez más y dar, en el caso más desfavorable, un cociente igual á 10, lo que haria modificar la cifra última hallada; pero el último resto seria entónces menor que el último divisor, que es lo que necesitamos; y este último resto seguido de las cifras separadas en el dividendo, seria por consiguiente menor que todo el divisor; luego el resto R es menor que B.

El número E *tambien es menor que el divisor.* En efecto, los errores de los productos parciales se principian á cometer cuando se principian á borrar las cifras en el divisor; de modo que el caso más desventajoso será cuando se principie con un divisor abreviado: en ese caso el error principiará en la primera cifra del cociente que llamaremos a.

En el producto de a por el divisor abreviado se desprecian las unidades que provienen del producto de dicha cifra a por la primera de las borradas cuyo número es á lo más 9; por consiguiente, el error que proviene de esta operacion es menor que 9 unidades del órden que marca la unidad seguida de $n-1+m-1$ ceros, siendo n el número de cifras del cociente y m el de las separadas á la derecha del divisor; es decir, que el error citado será menor que $9\times10^{n+m-2}=0{,}9\times10^{n+m-1}$.

Ademas, despreciando el producto de la misma cifra a por lo restante del divisor, se comete un error menor que $10^{m-1}\times a\times10^{n-1}$, y como a es á lo más 9, dicho error será menor que $10^{m-1}\times9\times10^{n-1}=0{,}9\times10^{n+m-1}$; por lo tanto el error que se comete en la primera cifra del cociente, es menor que $2\times0{,}9\times10^{n+m-1}$.

Del mismo modo se demostraria que en cada una de las restantes cifras, se comete un error menor que la misma cantidad $2\times0{,}9\times10^{n+m-1}$; luego siendo n el número de cifras del cociente, el error total que se cometerá, ó sea E, es menor que $2n\times0{,}9\times10^{n+m-1}$.

Ahora bien, la parte marcada á la izquierda del divisor es mayor ó por lo ménos igual á $2n\times0{,}9$ unidades del órden marcado por las cifras separadas en el divisor, más las del cociente ménos una; ó lo que es lo mismo, la parte marcada á la izquierda del divisor, es por lo ménos igual á $2n\times0{,}9\times10^{n+m-1}$: por consiguiente el error E es menor que la parte marcada á la izquierda del divisor seguida de tantos ceros como cifras tiene dicha parte á su derecha, y con más razon será menor que todo el divisor, que es lo que se queria demostrar.

Siendo R y E menores que el divisor, $\frac{R}{B}$ y $\frac{E}{B}$ son menores que la unidad, y por consiguiente su diferencia lo es con más razon; luego el cociente Q hallado segun la regla, está aproximado por exceso ó defecto en ménos de una unidad.

Nota. La division de decimales se reduce á la de enteros igualando el número de cifras decimales, y se obtiene el cociente en ménos de una unidad segun la regla anterior. Si se quisiera obtener el cociente en ménos de una unidad del órden decimal n, se haria que el dividendo tuviese n cifras decimales, siendo entero el divisor, se efectuária la division como se ha dicho, y separando en el cociente n cifras decimales, tendriamos el cociente con la aproximacion pedida.

Método abreviado de la raiz cuadrada y cúbica.

27. Raiz cuadrada. El método abreviado de la raiz cuadrada está fundado en el principio siguiente:

Si se hallan más de la mitad de las cifras de la raiz de un número entero y se resta de dicho número el cuadrado de la raiz hallada, el cociente entero de dividir la diferencia que se obtenga por el duplo de dicha raiz, será lo que le falta á la raiz entera del número propuesto.

Sea N el número entero cuya raiz cuadrada entera tiene $2n+1$ cifras; supongamos que por el método ordinario se han hallado las $n+1$ primeras cifras de la raiz, y que sólo falta calcular las n restantes. Llamemos a al valor absoluto de la parte hallada de la raiz, compuesta, segun sabemos, de $n+1$ cifras; su valor relativo será evidentemente $a\times 10^n$. Representemos finalmente por x el valor exacto del completo de la raiz de N, y tendremos

$$N=(a\,.\,10^n+x)^2=a^2\,.\,10^{2n}+2ax\,.\,10^n+x^2.$$

Restando de ámbos miembros la cantidad $a^2\,.\,10^{2n}$, y dividiendo por $2a\,.\,10^n$, hallaremos, representando por R la diferencia $N-a^2\,.\,10^n$,

$$\frac{R}{2a\,.\,10^n}=x+\frac{x^2}{2a\,.\,10^n}.$$

Si ahora llamamos q al cociente de dividir R por $2a\,.\,10^n$ y R' al resto, se tendrá

$$\frac{R}{2a\,.\,10^n}=q+\frac{R'}{2a\,.\,10^n}.$$

De donde

$$x+\frac{x^2}{2a\,.\,10^n}=q+\frac{R'}{2a\,.\,10^n}$$

ó bien

$$x-q=\frac{R'}{2a\,.\,10^n}-\frac{x^2}{2a\,.\,10^n}.$$

Probando ahora que el segundo miembro de la igualdad anterior es menor que la unidad, tendremos demostrado que el cociente hallado q de la division de R por $2a\,.\,10^n$, se diferencia del verdadero en ménos de una unidad, y por tanto la parte entera de la raiz será $2a\,.\,10^n+q$.

Que el segundo miembro de la anterior igualdad es menor que la unidad es evidente, puesto que la fraccion $\frac{R'}{2a\,.\,10^n}$ es menor que la unidad, por ser R' el resto de dividir $N-a^2\,.\,10^{2n}$ por $2a\,.\,10^n$; la segunda fraccion tambien es menor que la unidad, puesto que x sólo contiene n cifras, y por tanto es menor que 10^n; tambien se tiene evidentemente $x < a$, y con más razon $x < 2a$; luego

$$x^2 < 2a \cdot 10^n, \quad \text{ó} \quad \frac{x^2}{2a \cdot 10^n} < 1,$$

y siendo las dos fracciones que forman el segundo miembro menores que la unidad, su diferencia lo será con más razon.

La raiz entera de N es, por consiguiente, $a \cdot 10^n + q$, la cual estará aproximada por defecto ó exceso en ménos de una unidad, segun que R' sea mayor ó menor que x; en el caso de ser $R' = x$, la expresion $a \cdot 10^n + q$ será la raiz exacta.

28. Demostrado este principio, diremos que para extraer la raiz cuadrada de un número entero por un método abreviado, se hallarán por el método ordinario las tres primeras cifras de la raiz; el resto obtenido seguido de los dos siguientes períodos, dividido por el duplo de la raiz hallada, nos dará las dos cifras siguientes de la raiz; se hallará el resto correspondiente á estas dos cifras, y bajando á su derecha los cuatro períodos siguientes y dividiendo el resultado por el duplo de la raiz hallada, obtendremos cuatro cifras más; conociendo ya nueve cifras, por igual procedimiento se hallarán otras ocho, y así sucesivamente.

Por este método se halla con suma facilidad que la raiz de 2 aproximada en ménos de una cienmillonésima, es 1,41421356.

29. Raiz cúbica. El método abreviado de la raiz cúbica se funda en el siguiente principio:

Cuando se conocen las (n + 2) *primeras cifras de la parte entera de la raiz de un número* N, *se pueden obtener las* n *siguientes dividiendo el resto por el triplo del cuadrado del valor relativo de la parte hallada en la raiz.*

Representemos por a el valor absoluto de la raiz hallada compuesta de $n + 2$ cifras; su valor relativo será $a \cdot 10^n$. Sea x el valor exacto del completo de la raiz, y se tendrá

$$N = (a \cdot 10^n + x)^3 = a^3 \cdot 10^{3n} + 3a^2x \cdot 10^{2n} + 3ax^2 \cdot 10^n + x^3.$$

Restando de ambos miembros la cantidad $a^3 \cdot 10^{3n}$, representando la diferencia de N y $a^3 \cdot 10^{3n}$ por R, y dividiendo por $3a^2 \cdot 10^{2n}$, tendremos

$$\frac{R}{3a^2 \cdot 10^{2n}} = x + \frac{3ax^2 \cdot 10^n + x^3}{3a^2 \cdot 10^n}.$$

Si llamamos q al cociente entero indicado en el primer miembro, y R' al resto, tendremos evidentemente

$$x + \frac{3ax^2 \cdot 10^n + x^3}{3a^2 \cdot 10^{2n}} = q + \frac{R'}{3a^2 \cdot 10^{2n}},$$

ó bien

$$x - q = \frac{R'}{3a^2 \cdot 10^{2n}} - \frac{3ax^2 \cdot 10^n + x^3}{3a^2 \cdot 10^{2n}} \qquad [1].$$

Probemos ahora que el segundo miembro de la igualdad anterior es menor que la unidad, y quedará demostrado que la parte entera restante de la raiz es q.

Para demostrar esto observaremos que siendo R′ el resto de dividir R por $3a^2 \cdot 10^{2n}$, la primera fraccion es menor que la unidad.

La segunda fraccion puede ponerse bajo la forma

$$\frac{3ax^2 \cdot 10^n + x^3}{3a^2 \cdot 10^{2n}} = \frac{x^2}{a \cdot 10^n} \times \frac{3a \cdot 10^n + x}{3a \cdot 10^n}.$$

Ahora bien, x se compone de n cifras; luego x^2 tendrá á lo más $2n$. El factor a del denominador tiene, por lo ménos, $n + 2$ cifras; luego el denominador $a \cdot 10^n$ tendrá, por lo ménos, $2n + 2$; de donde se deduce que la fraccion $\frac{x^2}{a \cdot 10^n}$ es menor que la unidad.

La fraccion $\frac{3a \cdot 10^n + x}{3a \cdot 10^n}$ tambien lo es evidentemente; luego el producto de ambas fracciones, ó sea su igual $\frac{3ax^2 \cdot 10^n + x^3}{3a^2 \cdot 10^{2n}}$, es menor que la unidad.

Siendo menores que la unidad las dos fracciones que forman el segundo miembro de la igualdad [1], su diferencia será menor que 1, y por tanto la raiz cúbica entera de N será $a \cdot 10^n + q$.

La raiz hallada por este método abreviado será exacta si $R' = x$, y vendrá aproximada por defecto ó exceso en ménos de una unidad segun que R′ sea mayor ó menor que x.

30. Demostrado este principio, diremos que: para extraer la raiz cúbica de un número entero por un método abreviado, se hallarán por el método ordinario las cuatro primeras cifras de la raiz; el resto obtenido seguido de los dos períodos siguientes, dividido por el triplo del cuadrado de la raiz hallada, nos dará las dos cifras siguientes de la raiz; se hallará el resto correspondiente á estas dos cifras, y bajando á su derecha los cuatro períodos siguientes y dividiendo el resultado por el triplo del cuadrado de la raiz hallada, obtendremos cuatro cifras más. Conociendo ya diez cifras, por igual procedimiento se hallarán otras ocho, y así sucesivamente.

Ligeras nociones de geometría para comprender las unidades cuadradas y cúbicas del sistema de pesas y medidas.

31. Todo cuerpo material ocupa un cierto lugar en el espacio indefinido á cuyo lugar se le da el nombre de *espacio*.

Los cuerpos son extensos en tres sentidos, que se llaman dimensiones: *longitud* ó largo, *latitud* ó ancho, *profundidad* ó grueso; estas tres dimensiones no existen materialmente si no existe el cuerpo á que pertenecen; sin embargo, por una facultad inherente al hombre, se puede prescindir del cuerpo material y formarnos la idea de la extension en sus tres sentidos, ó sea del espacio de un cuerpo.

Prescindiendo de una de estas dimensiones, nos quedará la extension en dos sentidos, longitud y latitud, que es á lo que se le da el nombre de *superficie;* y si suponemos que una de estas dimensiones desaparece, obtenemos la idea de la extension en un solo sentido, longitud, que es lo que se llama *línea;* el límite de la línea, ó sea el cero de extension, es lo que se llama *punto.*

Las líneas se dividen en *rectas*, *quebradas* y *curvas*.

La línea *recta*, por lo mismo que todos comprendemos lo que es, es díficil definirla de un modo rigoroso; sin embargo, se dice que *es el camino más corto que hay de un punto á otro.*

Línea *quebrada* es la que se compone de varias rectas sin formar una sola recta, tal como la ABCDE (*Fig.* 1).

Línea *curva* es aquella en la cual ninguna porcion, por pequeña que sea, es línea recta. La línea ABC (*Fig.* 2) es una línea curva.

Se llama *distancia* entre dos puntos la línea recta que los une, por ser la menor que entre ellos puede haber.

Se llama *plano* aquella superficie á la cual aplicando en todos sentidos una recta, tal como el borde de una regla bien construida, coincide siempre con dicha superficie.

Se llama *circunferencia* una línea curva cerrada cuyos puntos están en un plano y equidistantes de uno interior llamado *centro*.

Radio es toda línea OA (*Fig.* 3) que partiendo del centro termina en la circunferencia.

Diámetro es la línea BC que pasando por el centro O termina con sus extremos en la circunferencia.

Cuerda es toda línea DE que une dos puntos de la circunferencia sin pasar por el centro.

Arco es cualquier porcion AC de la circunferencia.

Círculo es la porcion de plano comprendido en la circunferencia.

Se llama *ángulo* el espacio indefinido que comprenden dos rectas indefinidas AB y AC (*Fig.* 4), que se cortan en un punto A, llamado *vértice* del ángulo.

Las dos rectas AB y AC que forman el ángulo se llaman *lados*.

Los ángulos se expresan con tres letras, una en el vértice y cada una de las otras dos en cada lado. La letra del vértice se coloca en medio; así se dice el ángulo BAC.

Se dice que una recta, AB (*Fig.* 5), es *perpendicular* á otra, CD, cuando los dos ángulos BAD y BAC, *adyacentes*, son iguales.

Ángulo *recto* es cualquiera de los que forma una recta con otra á la cual es perpendicular.

Ángulo *agudo* es todo el que es menor que un recto, y obtuso el que es mayor.

Se dice que dos rectas son *paralelas*, cuando estando situadas en un mismo plano no se encuentran por mucho que se prolonguen.

Planos *paralelos* son aquellos que por mucho que se prolonguen no se encuentran.

Rectángulo es la porcion de plano ABCD (*Fig.* 6), comprendida entre cuatro rectas AB, BC, ED y DA, llamadas *lados* del rectángulo, las cuales son iguales y paralelas de dos en dos, y cuyos ángulos son todos rectos.

Cuadrado es la porcion de plano ABCD (*Fig.* 7) comprendida entre cuatro rectas iguales y cuyos cuatro ángulos son rectos. Las líneas que forman al cuadrado se llaman *lados* de dicho cuadrado.

Se llama *cilindro*, el espacio que engendra un rectángulo ABCD (*Fig.* 8) que gira al rededor de uno de sus lados.

Se llaman *bases* del cilindro los círculos que engendran los dos lados AB y DC del rectángulo, y *altura* del cilindro es el lado AD.

Superficie cilíndrica, es la que engendra el lado BC.

Se llama *cubo* el espacio limitado AF (*Fig.* 9) por seis cuadrados ABEH, BCFE, CFGD, etc. iguales. Los lados de los cuadrados se llaman aristas del cubo.

32. Aplicando á un caso particular los problemas de los números (238 y 239), y suponiendo que éste sea hallar los piés cuadrados ó cúbicos que tiene una vara cuadrada ó cúbica, se tendrá, empleando el mismo razonamiento que allí se empleó, y valiéndonos de las (*Figs.* 10 y 11), que una vara cuadrada tiene $3^2 = 9$ pies cuadrados, y una vara cúbica $3^3 = 27$ piés cúbicos.

FIN.

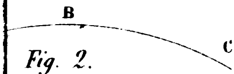


Fig. 2.

Fig. 3.

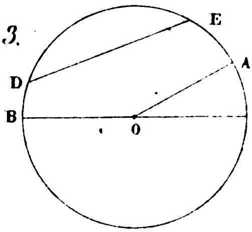
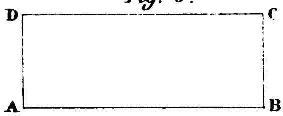


Fig. 6.



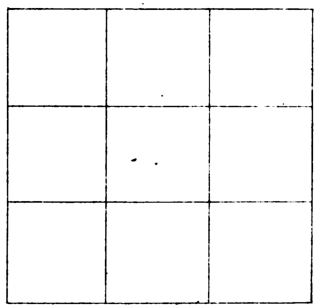
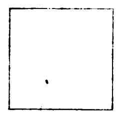
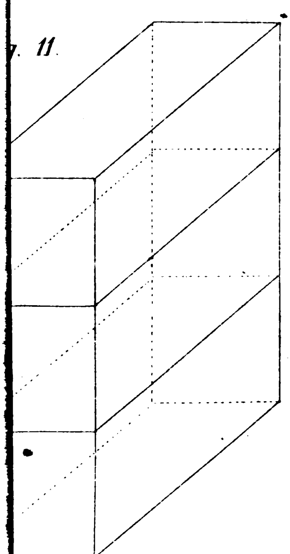
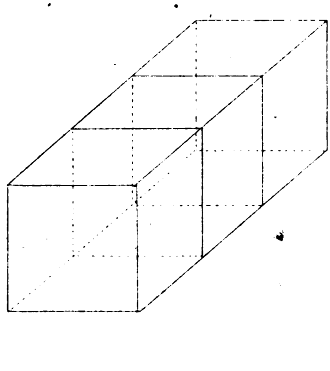


Fig. 10.



. 11.





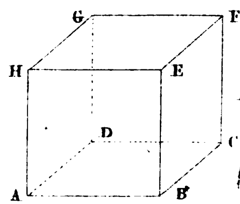


Fig. 9.